

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

FACOLTÀ DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tecniche numeriche per l'applicazione
dello Shape for Shading alla
documentazione di incisioni parietali
rupestri.

Relatori:

Prof. Giuseppe Rodriguez

Candidato:

Elisa Crabu

matr. 60/65/65095

Anno Accademico 2022/2023

24 Febbraio 2023

Indice

1	Il problema del Photometric Stereo	3
1.1	Introduzione al problema e notazione	3
1.2	Photometric stereo con illuminazione nota	6
1.2.1	Metodi alle differenze finite	8
1.3	Photometric stereo con illuminazione sconosciuta	12
1.3.1	Determinazione della matrice Q	14
2	Applicazione per la ricostruzione di alcune incisioni rupestri	17
2.1	Ricostruzione di una superficie sintetica	18
2.2	Ricostruzione di una conchiglia	21
2.3	Le Domus de Janas di Pimentel	24
3	Idealità dei dati	31
3.1	Impostazioni della macchina fotografica	31
3.2	Analisi dei valori singolari	34
3.3	Lunghezza del vettore luce	36
3.4	Il problema dell'idealità dei dati	39

Introduzione

Nell'archeologia uno degli aspetti più importanti è la catalogazione dei reperti. Nel caso di incisioni o dipinti rupestri si ha la necessità di trovare un metodo per poter documentare questi reperti in modo digitale.

Lo scopo di questa trattazione è di applicare ad alcune incisioni rupestri presenti nelle Domus de Janas di Pimetel un metodo che sfrutta la tecnica dello Shape from Shading per ricostruirne la forma digitale partendo da un set di immagini.

Il metodo utilizzato è una particolare tecnica di Shape from Shading detta Photometric Stereo; questo metodo è stato utilizzato in diversi studi, in cui però si supponeva di conoscere la direzione della luce. Nel nostro caso questa informazione non è nota a priori ed è quindi stato costituito un metodo che la stima utilizzando le informazioni presenti nelle foto.

La tecnica che andremo a descrivere è quella determinata in [3], di cui è stata fatta un'applicazione immediata su una conchiglia.

Abbiamo poi applicato il metodo alle incisioni delle Domus di Pimentel, di cui è stato ricavato un set di immagini concentrandosi in particolar modo su due incisioni. Le ricostruzioni ottenute sono state abbastanza soddisfacenti, ma non le migliori possibili.

Ci siamo infine dedicati allo studio delle problematiche presentatesi durante l'applicazione del metodo, che hanno messo in evidenza alcune criticità. I problemi principali sono state delle ricostruzioni molto distorte, dovute ad una ricostruzione delle luci errata. Sono stati tentati diversi approcci per determinarne il problema, di cui parleremo in dettaglio. Un altro punto è stato il non poter, in alcuni casi, ricostruire la forma in quanto si è ottenuto un risultato non in linea con le supposizioni teoriche, che ha interrotto il calcolo ancora prima della determinazione delle luci.

Come vedremo non tutti i problemi sono stati risolti, ma in alcuni casi sono stati individuate delle osservazioni da fare per capire già inizialmente come scegliere i dati in modo da migliorare la ricostruzione.

Capitolo 1

Il problema del Photometric Stereo

1.1 Introduzione al problema e notazione

Lo Shape for Shading [5] è un tipico problema di Computer Vision che si occupa di ricostruire la forma di un oggetto a partire da un set di immagini quando questo viene illuminato da una sorgente luminosa.

É noto che la frazione di luce incidente riflessa dall'oggetto è legata alle sue proprietà ottiche e al materiale di cui è fatto ed è diversa al variare del punto della superficie: questa informazione può essere usata per ricostruirne la forma. L'idea generale è di costruire una *funzione di riflettività* che raccolga in un modello le informazioni relative alla sorgente luminosa, alla riflettività dell'oggetto e all'immagine, in modo che l'intensità dell'immagine possa essere espressa in funzione dell'orientazione della superficie. In particolare si può dimostrare che è possibile ricostruire la forma di un oggetto se di esso sono note la funzione di riflettività e la posizione della sorgente luminosa.

Se abbiamo a disposizione una sola foto il problema dello Shape from Shading risulta malposto e non abbiamo una soluzione unica. Si ha quindi bisogno di un altro metodo: un possibile approccio è il Photometric Stereo (PS) [9].

Il *Photometric stereo* è una tecnica di shape from shading in cui si utilizza un set di immagini, che contengono forma e colore dell'oggetto, ottenuto facendo variare la direzione della sorgente luminosa e mantenendo costante il punto di osservazione; questo fornisce informazioni sufficienti per ricavare l'orientazione della superficie che sarà poi utile per la ricostruzione

della forma dell'oggetto.

La formulazione generale del Photometric Stereo richiede che siano note, a priori, la posizione e l'intensità della sorgente luminosa [1], la mancanza di questa informazione infatti porta ad una ricostruzione distorta dell'oggetto. Nel nostro studio non siamo però in condizioni di idealità e abbiamo quindi bisogno di un metodo per stimare, dato un set di foto, la posizione della sorgente luminosa.

La stima della posizione della luce è un problema affrontato in diversi studi ma la soluzione è stata trovata da Hayakawa [4]. Il metodo da lui determinato è stato quindi utilizzato per la costruzione di un algoritmo che permette di risolvere il problema del Photometric stereo con illuminazione sconosciuta [3]. Vediamone ora la formulazione in quanto è quella di cui ci occuperemo.

Consideriamo un oggetto posto al centro di un sistema di riferimento nello spazio \mathbb{R}^3 , supponiamo che sia osservato da una fotocamera il cui asse ottico coincide con l'asse z e che il piano xy coincida col piano dell'immagine e catturiamo diverse foto al variare della direzione della sorgente luminosa.

Supponiamo che ciascuna immagine abbia una risoluzione di $(r+2) \times (s+2)$ pixel e indichiamo con A la lunghezza del lato orizzontale. Ogni foto definisce un dominio $\Omega = [-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}] \times [-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]$ con $B = (s+1)h$, $h = \frac{A}{(r+1)}$. Consideriamo quindi la seguente discretizzazione del dominio:

$$\begin{aligned} x_i &= -\frac{A}{2} + ih, \quad i = 0, \dots, r+1, \\ y_j &= -\frac{B}{2} + jh, \quad j = 0, \dots, s+1. \end{aligned} \tag{1.1}$$

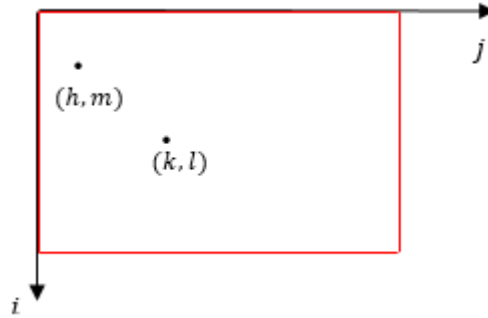
Se la superficie è rappresentata dalla funzione bivariata $z = u(x, y)$, con $(x, y) \in \Omega$, avremo che il gradiente di u e la normale alla superficie sono dati dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \nabla u(x, y) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}, \\ n(x, y) &= \frac{(-u_x, -u_y, 1)^T}{\sqrt{1 + \|\nabla(u)\|^2}}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Per questioni computazionali, ordiniamo i pixel secondo l'ordine lessicografico.

L'ordinamento lessicografico permette di riportare un dato bidimensionale in uno monodi-

mensionale. Infatti, supponendo di avere una matrice di dati i cui elementi hanno indici (i, j) che schematicamente possiamo rappresentare come segue



presi due elementi di coordinate $(h, m), (k, l)$ diremo che

$$(h, m) > (k, l) \quad \text{se} \quad m > l \quad \text{o} \quad m = l \quad \text{e} \quad h > k.$$

Più semplicemente avremo che, considerando le colonne di una matrice, costruiremo un vettore avente come componenti le colonne della matrice prese una alla volta. Seguendo questo ordine indichiamo con $m_i \in \mathbb{R}^p, i = 1, \dots, q$ i vettori immagine ottenuti da ciascuna immagine mediante l'ordine lessicografico.

Sia p il numero di pixel dell'immagine, che sarà pari a $p = (r + 2) \times (s + 2)$ o $p = rs$ in base al fatto che i pixel nel bordo siano o meno punti della discretizzazione. In questo caso il pixel di coordinate (i, j) avrà indice $k = (i - 1)s + j, k = 1, \dots, p$.

Introduciamo la seguente notazione:

$$u(x_i, y_j) = u_{i,j} = u_k,$$

$$u_x(x_i, y_j) = (u_x)_{i,j} = (u_x)_k,$$

$$u_y(x_i, y_j) = (u_y)_{i,j} = (u_y)_k,$$

$$n(x_i, y_j) = n_{i,j} = n_k.$$

Supponendo di avere un set di q foto, il vettore luce che dall'oggetto punta verso la sorgente luminosa, che supponiamo essere posta all'infinito, avrà norma proporzionale all'intensità della luce e direzione data da

$$l_t = \begin{pmatrix} l_{1t} \\ l_{2t} \\ l_{3t} \end{pmatrix}, \quad t = 1, \dots, q.$$

1.2 Photometric stereo con illuminazione nota

Supponiamo, per ora, di conoscere la direzione delle luci l_t , $t = 1, \dots, q$. Per costruire il modello è necessario fare alcune assunzioni, richiediamo quindi che:

- la sorgente luminosa si trovi a distanza infinita dall'oggetto,
- l'oggetto sia completamente illuminato, ovvero non vi siano delle zone ombreggiate,
- la macchina fotografica si trovi sufficientemente distante in modo che possano essere trascurate eventuali deformazioni,
- la superficie sia una superficie di Lambert.

In particolare, una superficie di Lambert è una superficie che riflette la luce incidente nello stesso modo in tutte le direzioni, ovvero da qualsiasi punto la si osservi la sua luminanza non cambia. Questa è una superficie diffondente ideale, in natura infatti solo alcuni oggetti si avvicinano per le loro caratteristiche a questo tipo di superfici. Le superfici di Lambert soddisfano la cosiddetta *legge del coseno di Lambert* che afferma che l'intensità della luce in ogni punto è proporzionale all'angolo tra la normale e la direzione della luce ed è espressa dalla seguente espressione

$$\rho(x, y) \langle n(x, y), l_t \rangle = I_t(x, y), \quad t = 1, \dots, q, \quad (1.3)$$

dove $\rho(x, y)$ rappresenta l'albedo, una quantità che tiene conto del parziale assorbimento della luce da quella porzione di superficie. La formulazione del problema mediante la discretizzazione (1.1) porta alla formulazione di un problema differenziale di Hamilton-Jacobi, che viene affrontato in [7] e di cui vediamo in seguito la costruzione.

Esprimendo la normale e il vettore l_t nel seguente modo

$$\begin{aligned} n(x, y) &= \frac{(-\nabla u(x, y), 1)^t}{\sqrt{1 + \|\nabla u(x, y)\|^2}}, \\ l_t &= \begin{pmatrix} \tilde{l}_t \\ l_{3t} \end{pmatrix}, \quad l_t \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

avremo che l'equazione (1.3) diventa

$$I_t(x, y) = \rho(x, y) \frac{\langle \nabla u(x, y), \tilde{l}_t \rangle + l_{3t}}{\sqrt{1 + \|\nabla u(x, y)\|^2}}, \quad t = 1, \dots, q \quad (1.5)$$

e imponendo condizioni al contorno di Dirichlet si ottiene l'equazione alle derivate parziali di Hamilton-Jacobi

$$\begin{cases} H_t(x, y, \nabla u(x, y)) = 0, & t = 1, \dots, q, \\ u(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Questo problema risulta essere ben posto per $q = 2$, ma di solito si richiede $q > 2$ al fine di ridurre il rumore presente nei dati sperimentali. Lo svantaggio di questo metodo è che l'operatore da invertire dipende dai dati e la matrice del sistema potrebbe essere singolare o mal condizionata.

Per semplificare il problema, costruiamo un metodo che va a scomporlo in due sottoproblemi più semplici:

1. il primo simultaneamente determina i vettori normali alla superficie e stima la posizione delle luci;
2. il secondo ricostruisce l'immagine attraverso la risoluzione di un'equazione di Poisson.

Applicando ora la discretizzazione (1.1) al problema (per i valori ai bordi imponremo poi delle appropriate condizioni al contorno) e, indicando con ρ_k e n_k l'albedo e la normale normalizzata, possiamo esprimere il problema come segue

$$\rho_k n_k^T l_t = m_{kt}, \quad k = 1, \dots, p, \quad t = 1, \dots, q, \quad (1.6)$$

dove m_{kt} rappresenta la radiazione $I_t(x, y)$ riflessa da una piccola area intorno al k -esimo pixel della i -esima foto, che sarà la componente k dei vettori m_i , $i = 1, \dots, q$ che contengono le immagini.

Possiamo quindi definire le matrici (Vedi "diag)

$$D = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_p) \in \mathbb{R}^{p \times p},$$

$$L = [l_1, \dots, l_q] \in \mathbb{R}^{3 \times q},$$

$$N = [n_1, \dots, n_p] \in \mathbb{R}^{3 \times p},$$

$$M = [m_1, \dots, m_q] \in \mathbb{R}^{p \times q},$$

da cui avremo che il problema può essere espresso nella forma

$$DN^T L = M. \quad (1.7)$$

Supponendo di conoscere la posizione della luce, consideriamo l'espressione

$$\tilde{N}^T = ML^\dagger, \quad (1.8)$$

con L^\dagger la Pseudoinversa di L .

Normalizzando le colonne della matrice \tilde{N} ricaviamo $ND = \tilde{N}$, dove N e D rappresentano le normali e l'albedo. Affinché il problema ammetta un'unica soluzione è necessario che $q \geq 3$, abbiamo quindi bisogno di almeno 3 immagini per poterlo risolvere.

Supponendo ora di aver determinato N , consideriamo il vettore ottenuto normalizzando la terza componente di n_k

$$((u_x)_k, (u_y)_k, -1)^t = -\frac{n_k}{(n_k)_3}.$$

Consideriamo quindi il seguente problema di Poisson, ottenuto differenziando le prime due componenti di questo vettore per ottenere un'approssimazione, nella griglia (1.1) del Laplaciano

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad (1.9)$$

dove $z = u(x, y)$ rappresenta la superficie dell'oggetto. Per determinarne una soluzione utilizziamo il cosiddetto *metodo alle differenze finite* di cui diamo ora una rapida illustrazione.

1.2.1 Metodi alle differenze finite

I metodi alle differenze finite sono dei metodi numerici per la determinazione della soluzione di equazioni alle derivate parziali (PDE). Le PDE sono classificate come: *ellittiche*, *paraboliche* e *iperboliche*. L'equazione di Poisson che andremo a studiare è una PDE di tipo ellittico, vediamo quindi come determinarne, in generale, la soluzione.

Consideriamo il problema con condizioni a contorno di Dirichlet

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + p(x, y) u_x + q(x, y) u_y + r(x, y)u = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(a, y) = \varphi_1(y), u(b, y) = \varphi_2(y), & y \in [c, d], \\ u(x, c) = \psi_1(x), u(x, d) = \psi_2(x), & x \in [a, b], \end{cases} \quad (1.10)$$

con $\Omega = [a, b] \times [c, d]$. Richiediamo che $r(x, y) \leq 0$ affinché il problema ammetta una soluzione e che questa sia unica."discretizzazione e h"

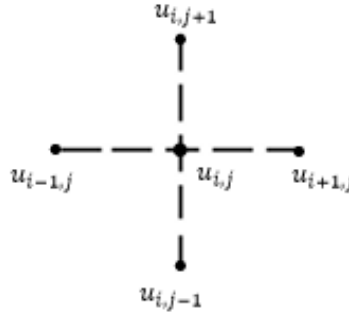
Consideriamo la discretizzazione del dominio data da (1.1) e approssimiamo le derivate con le *differenze finite centrate*

$$\begin{aligned}
 u_x(x_i, y_j) &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + O(h^2), \\
 u_y(x_i, y_j) &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} + O(h^2), \\
 u_{xx}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2), \\
 u_{yy}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} + O(h^2).
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Valutando il problema nei nodi (x_i, y_j) e considerando le approssimazioni fatte il problema (1.10) diventa

$$\begin{cases}
 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} + p(x_i, y_j) \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + \\
 \quad + q(x_i, y_j) \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} + r(x_i, y_j) u_{i,j} = f(x_i, y_j), \\
 u_{0,j} = \varphi_1(y_j), \quad u_{r+1,j} = \varphi_2(y_j), \quad j = 0, \dots, s+1, \\
 u_{i,0} = \psi_1(x_i), \quad u_{i,s+1} = \psi_2(x_i), \quad i = 0, \dots, r+1.
 \end{cases} \tag{1.12}$$

Le variabili utilizzate sono



per cui utilizziamo uno *schema a 5 punti*.

Raccogliendo otteniamo

$$\begin{cases}
 u_{i-1,j} \left[\frac{1}{h^2} - \frac{p(x_i, y_j)}{2h} \right] + u_{i,j-1} \left[\frac{1}{h^2} - \frac{q(x_i, y_j)}{2h} \right] + u_{i,j} \left[-\frac{4}{h^2} - r(x_i, y_j) \right] + \\
 \quad + u_{i+1,j} \left[\frac{1}{h^2} + \frac{p(x_i, y_j)}{2h} \right] + u_{i,j+1} \left[\frac{1}{h^2} + \frac{q(x_i, y_j)}{2h} \right] = f(x_i, y_j), \\
 u_{0,j} = \varphi_1(y_j), \quad u_{r+1,j} = \varphi_2(y_j), \quad j = 0, \dots, s+1, \\
 u_{i,0} = \psi_1(x_i), \quad u_{i,s+1} = \psi_2(x_i), \quad i = 0, \dots, r+1.
 \end{cases} \tag{1.13}$$

Si ottiene un sistema $n \times n$ con una matrice dei coefficienti pentadiagonale.

L'errore commesso dal metodo è dell'ordine di $O(h^2)$, ovvero la differenza tra la soluzione esatta e la soluzione trovata, in norma sarà dell'ordine di h^2 . Aumentando quindi i nodi della discretizzazione, ovvero riducendo il passo h , avremo che questo errore si riduce.

Applichiamo quindi il metodo al nostro problema considerando per ora condizioni a contorno di Dirichlet date da

$$u\left(-\frac{A}{2}, y\right) = \varphi_1(y), \quad u\left(\frac{A}{2}, y\right) = \varphi_2(y), \quad y \in \left[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}\right], \quad (1.14)$$

$$u\left(x, -\frac{B}{2}\right) = \psi_1(x), \quad u\left(x, \frac{B}{2}\right) = \psi_2(x), \quad x \in \left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right], \quad (1.15)$$

Le funzioni $p(x, y), q(x, y), r(x, y)$ risultano nulle e, se indichiamo con $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$ i valori assunti da f nei nodi della discretizzazione, avremo che il problema avrà forma

$$\begin{cases} u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} = \tilde{f}_{i,j} \\ u_{0,j} = \varphi_1(y_j), \quad u_{r+1,j} = \varphi_2(y_j), \quad j = 0, \dots, s+1, \\ u_{i,0} = \psi_1(x_i), \quad u_{i,s+1} = \psi_2(x_i), \quad i = 0, \dots, r+1, \end{cases} \quad (1.16)$$

dove $\tilde{f}_{i,j} = h^2 f_{i,j}$. Possiamo quindi riscrivere il problema mediante il sistema pentadiagonale

$$\begin{cases} T u_1 + I_s u_2 = b_1, \\ I_s u_{i-1} + T u_i + I_s u_{i+1} = b_i, \quad i = 2, \dots, r-1, \\ I_s u_{r-1} + T u_r = b_r, \end{cases} \quad (1.17)$$

dove

$$T = \begin{bmatrix} -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{s \times s}$$

$$u_i = \begin{bmatrix} u_{i,1} \\ u_{i,2} \\ \vdots \\ u_{i,s} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^s, \quad i = 1, \dots, r,$$

I_s rappresenta la matrice identità di ordine s e i termini b_i sono dati da

$$b_1 = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{1,1} \\ \tilde{f}_{1,2} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{1,s} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{0,1} + u_{1,0} \\ u_{0,2} \\ \vdots \\ u_{0,s} + u_{1,s+1} \end{bmatrix},$$

$$b_r = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{r,1} \\ \tilde{f}_{r,2} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{r,s} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{r+1,1} + u_{r,0} \\ u_{r+1,2} \\ \vdots \\ u_{r+1,s} + u_{r,s+1} \end{bmatrix},$$

e

$$b_i = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{i,1} \\ \tilde{f}_{i,2} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{i,s} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{i,0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{i,s+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^s, \quad i = 2, \dots, r-1.$$

Possiamo infine riscrivere il problema come un sistema lineare " $Au = b$, di ordine $p \times p$ " definendo

$$A = \begin{bmatrix} T & I_s & & & \\ I_s & T & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & I_s & \\ & & & I_s & T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p.$$

che può essere risolto mediante diversi metodi iterativi.

Nella pratica si considerano problemi con condizioni di Dirichlet omogenee, ovvero con $\varphi_1(y) = \varphi_2(y) = \psi_1(x) = \psi_2(x) = 0$, questo corrisponde ad assumere che l'oggetto si trovi su uno sfondo piano.

Mediante la risoluzione del problema (1.16), supponendo di conoscere la direzione delle luci, abbiamo ottenuto la superficie $z = u(x, y)$ che determina la forma dell'oggetto fotografato.

1.3 Photometric stereo con illuminazione sconosciuta

Nelle applicazioni pratiche la richiesta della conoscenza della direzione della luce risulta essere molto limitante, in quanto spesso questa informazione non è nota e non può essere determinata da osservazioni esterne. Si ha quindi bisogno di un metodo che permetta, mediante le informazioni contenute nelle immagini, di approssimare la direzione della luce.

La soluzione di questo problema fu trovata da Hayakawa in [4]. Vediamone ora i dettagli in quanto descrivono il metodo che useremo per risolvere il problema.

Consideriamo la fattorizzazione a rango 3 (1.7) che riscriviamo, ponendo $\tilde{N} = N D$, come

$$\tilde{N}^T L = M. \quad (1.18)$$

Osserviamo che la soluzione del sistema non è unica. Vale infatti il seguente

Lemma 1. *Le matrici che contengono l'albedo, i vettori normali e i vettori luce, D, N, L , sono determinate a meno di una trasformazione unitaria e l'equazione (1.18) è soddisfatta da tutte le matrici $(Q\tilde{N}, QL)$, per ogni matrice ortogonale $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.*

Dimostrazione. Consideriamo le coppie di matrici della forma $(A^{-T}\tilde{N}, AL)$, $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ non singolare; queste soddisfano l'equazione in quanto

$$(A^{-T}\tilde{N})^T AL = \tilde{N}^T A^{-1} AL = \tilde{N}^T L = M.$$

Considerando i vettori n_k normalizzati, la norma della k -esima colonna di \tilde{N} darà uguale all'albedo ρ_k , mentre $\|l_k\|$ è proporzionale all'intensità della luce.. Questo implica che la matrice A debba essere ortogonale. \square

Questo fatto, detto *ambiguità di bassorilievo* [2], mostra che non è possibile determinare l'orientazione dell'oggetto senza informazioni a priori. Potrei infatti avere durante il calcolo una riflessione degli assi che andrebbe a distorcere tutta la ricostruzione. Prima di affrontare però questo problema facciamo un'ultima considerazione.

Non è restrittivo supporre che $\|l_t\| = 1$, $t = 1, \dots, q$. Infatti, negli esperimenti pratici si utilizza un flash posto ad una distanza fissa dall'oggetto che produce quindi una luce di intensità costante.

Consideriamo la decomposizione a valori singolari di M (SVD)

$$M = U \Sigma V^T, \quad (1.19)$$

dove

$U \in \mathbb{R}^{p \times q}$ matrice ortonormale le cui colonne sono i vettori singolari sinistri,

$V \in \mathbb{R}^{q \times q}$ matrice ortonormale le cui colonne sono i vettori singolari destri,

$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$ matrice diagonale contenente i valori singolari.

Solitamente, poiché i dati possono essere affetti da rumore, la fattorizzazione risulta avere rango maggiore di 3. Andremo quindi a considerare una *SVD troncata* in modo da ottenere una migliore approssimazione di M a rango 3.

Poniamo quindi $\sigma_4 = \dots = \sigma_q = 0$ e indichiamo con $W = [\sigma_1 u_1, \sigma_2 u_2, \sigma_3 u_3]^T$ e $Z = [v_1, v_2, v_3]^T$. Enunciamo e dimostriamo ora un teorema, che mostra un metodo per determinare le matrici \tilde{N} e L a partire da questa fattorizzazione.

Teorema 1. *I vettori normali e i vettori luce possono essere determinati in maniera univoca da (1.18) se sono disponibili almeno 6 immagini ottenute mediante diverse direzioni della luce.*

Dimostrazione. Consideriamo la fattorizzazione $M = W^T Z$ dove abbiamo che $W = [w_1, \dots, w_p]$ e $Z = [z_1, \dots, z_q]$. Sotto l'ipotesi che $\|l_t\| = 1, t = 1, \dots, q$, cerchiamo una matrice B tale che $\|Bz_t\| = 1$. Questa condizione può essere riscritta come

$$\text{diag}(Z^T G Z) = \mathbf{1} \quad (1.20)$$

con $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^q$ e $G = B^t B$ simmetrica definita positiva.

Poiché ogni equazione del sistema è della forma

$$z_t^T G z_t = \sum_{i,j=1}^3 z_{it} z_{jt} g_{ij} = 1,$$

possiamo riscrivere il sistema nella forma $Hg = \mathbf{1}$, dove

$$g = (g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{12}, g_{13}, g_{23})^T \quad (1.21)$$

$$H \text{ matrice } q \times 6 \text{ le cui righe sono } [z_{1t}^2 \ z_{2t}^2 \ z_{3t}^2 \ 2z_{1t}z_{2t} \ 2z_{1t}z_{3t} \ 2z_{2t}z_{3t}], \quad t = 1, \dots, q. \quad (1.22)$$

Affinché la soluzione sia unica è necessario quindi che $q \geq 6$. □

Osserviamo che questa condizione è necessaria ma non sufficiente, potrei avere infatti che la matrice H abbia rango inferiore anche per $q \geq 6$, questo porta a richiedere alcune condizioni sulla direzione della luce.

Ad esempio, se consideriamo una sorgente luminosa che si muove lungo una circonferenza attorno alla fotocamera, parallela al piano xy e posta ad una altezza δ da esso, andremo a considerare q angoli $\theta_1, \dots, \theta_q \in [0, 2\pi)$ tali che

$$l_t = \frac{(\cos \theta_t, \sin \theta_t, \delta)^T}{\sqrt{1 + \delta^2}}, \quad t = 1, \dots, q.$$

In questo modo però la terza riga di H risulta essere una combinazione lineare delle altre due e verrebbe meno la richiesta sul suo rango. Solitamente quindi si considerano posizioni casuali della sorgente in modo da ottenere una matrice a rango pieno.

Poiché la matrice B è ottenuta mediante una trasformazione unitaria, possiamo considerare la sua fattorizzazione QR . Avendo bisogno solamente della matrice R essa può essere ottenuta calcolando una fattorizzazione di Cholesky della matrice G che sarà data da $G = R^T R$. Dopo aver determinato Q , come vedremo nel paragrafo successivo, avremo che ponendo

$$\tilde{N} = QR^T W \quad \text{e} \quad L = QRZ \tag{1.23}$$

il problema (1.18) è risolto.

1.3.1 Determinazione della matrice Q

Vediamo ora come determinare la trasformazione unitaria Q .

Sappiamo da [2] che non è possibile ricavare questa informazione dai dati, ma nel nostro caso possiamo ricavare questa informazione mediante una particolare procedura di acquisizione delle immagini. Infatti, essa consiste nell'impostare la sorgente luminosa alla destra dell'oggetto nella prima immagine e spostarla in senso antiorario attorno all'oggetto.

Dopo aver determinato le matrici $\hat{N} = R^{-T}W$ e $\hat{L} = RZ$, consideriamo le colonne di \hat{L} , \hat{l}_t , con indice $t = 1, \lfloor \frac{q}{3} \rfloor, \lfloor \frac{2q}{3} \rfloor$.

È necessario verificare che questa terna di vettori sia orientata positivamente, possiamo farlo considerando il determinante della matrice avente per colonne i tre vettori. Se questo infatti

risultasse negativo, avremmo introdotto, mediante la fattorizzazione, una riflessione degli assi.

Per risolvere il problema basterà quindi modificare il segno della terza riga di \hat{N} , \hat{L} .

Quando il sistema è orientato positivamente, per determinare la matrice Q poniamo

$$v_3 = \sum_{t=1}^q \hat{l}_t$$

e supponiamo che questo mi dia la direzione dell'asse z .

L'asse x è ottenuta proiettando \hat{l}_1 su un piano ortogonale a v_3 , l'asse y calcolando $v_2 = v_3 \wedge v_1$.

Dopo aver normalizzato i tre vettori avremo che la matrice Q sarà data da $Q = [v_1 \ v_2 \ v_3]$.

Capitolo 2

Applicazione per la ricostruzione di alcune incisioni rupestri

In questo capitolo andremo ad applicare il metodo inizialmente ad una superficie sintetica, per verificare l'accuratezza dell'algoritmo nel caso di dati ideali, e successivamente a due set di dati reali.

Per costruire i set di foto dei due oggetti sono stati utilizzati diversi strumenti:

- una macchina fotografica “Canon EOS 250D” con un cavalletto,
- un righello, utilizzato per calcolare il numero di pixel per centimetro,
- un flash.

È stato utilizzato il software *MATLAB* [6] per l'implementazione dell'algoritmo, che è stato sviluppato in [3], di cui elenchiamo ora i passi principali:

1. caricamento delle immagini in una matrice M , dove ciascuna immagine è stata convertita in scala di grigi;
2. calcolo della SVD della matrice da cui si ricavano, mediante il Teorema 1, i vettori \hat{L} e \hat{N} ;
3. calcolo della matrice Q da cui otteniamo L e \tilde{N} (1.23). Da questa si ricavano infine N e D ;

4. risoluzione del problema di Poisson che mi fornisce la superficie cercata (1.9).

2.1 Ricostruzione di una superficie sintetica

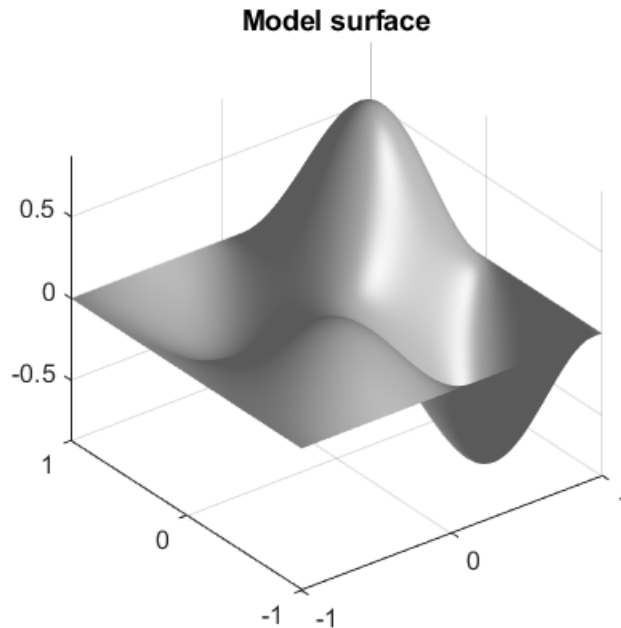
Inizialmente, al fine di verificare l'accuratezza del metodo, testiamo l'algoritmo su un dataset sintetico che è stato introdotto in [3]. Fissiamo sette direzioni luminose $q = 7$, ponendole agli angoli $(0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4})$ e costruiamo il set di immagini applicando il modello alla superficie

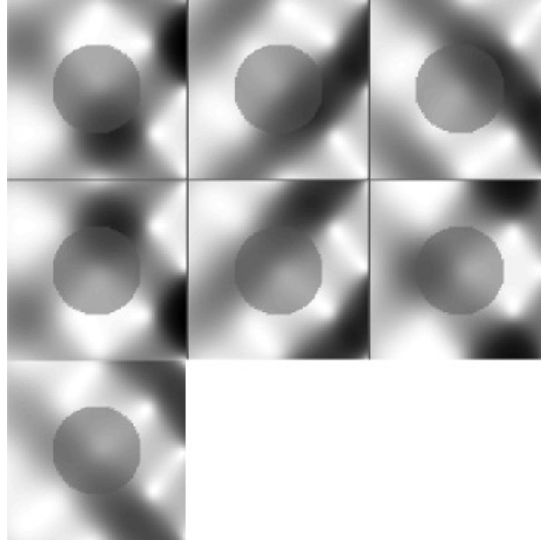
$$u(x, y) = \frac{1}{2}e^x \sin \pi x \sin \pi y$$

con dominio $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Ogni immagine è formata da 101×101 pixel con albedo pari a

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x^2 + y^2 < \frac{1}{4}, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

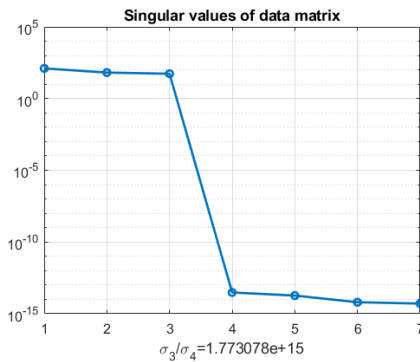
Le figure sotto mostrano la superficie sintetica e il set di immagini utilizzate





Una delle considerazioni teoriche fatte è stata quella di trovare la decomposizione a valori singolari troncata, cercando un'approssimazione della matrice a rango 3. Questo sarà un punto cruciale dello studio, soprattutto nelle applicazioni successive, e vogliamo quindi capire se in questo caso l'approssimazione fatta sia buona, ovvero se la matrice abbia effettivamente i valori singolari $\sigma_4, \dots, \sigma_q$ approssimabili a zero.

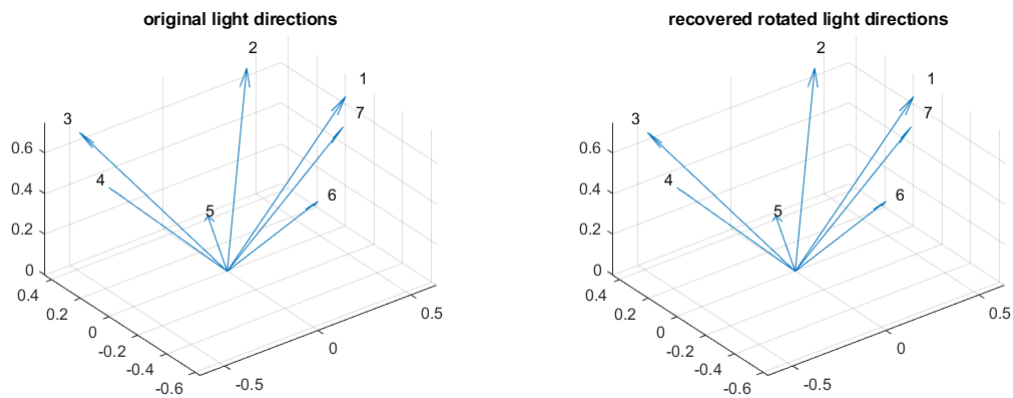
Rappresentando graficamente i valori singolari otteniamo



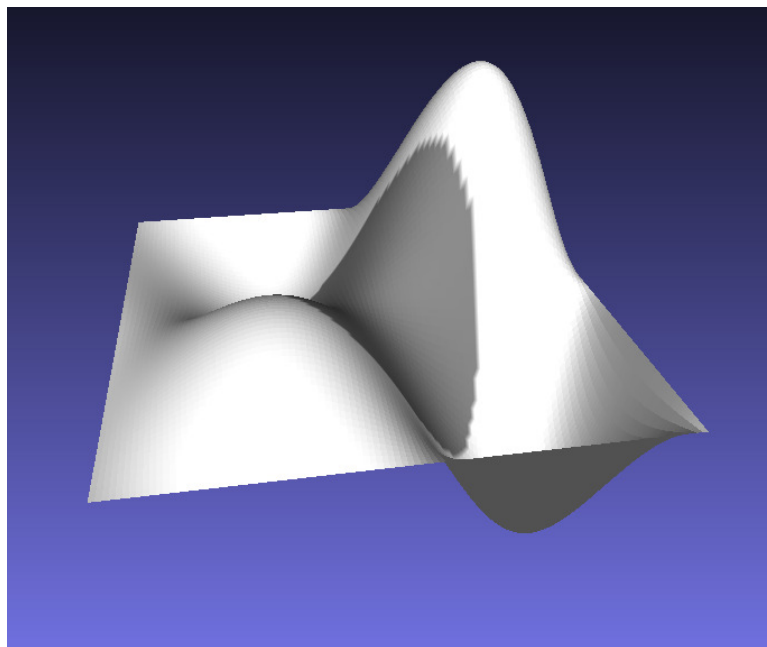
che mostra che i valori singolari dal quarto in poi sono molto vicini allo zero e quindi la matrice ha rango numerico pari a 3. Ci concentriamo soprattutto sul rapporto tra il terzo e il quarto valore singolare: più questa quantità è grande più siamo vicini alle condizioni richieste dal modello.

Uno dei passi principali del metodo consiste nella ricostruzione delle direzioni luminose, nel nostro caso queste sono già note ma è utile determinarle anche mediante il metodo

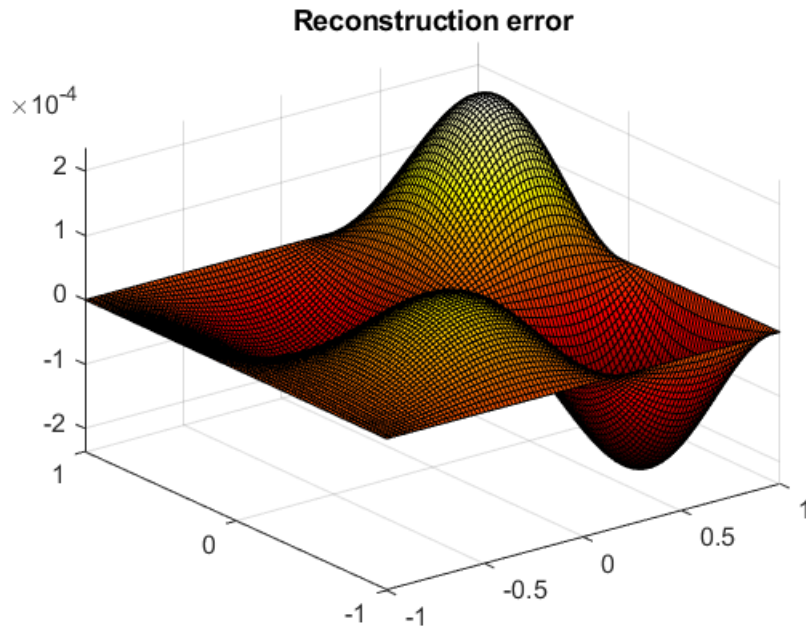
per capirne l'effettiva resa. Di seguito sono rappresentate le luci originali e quelle ricostruite dall'algorithm



L'ultimo passo del metodo va a determinare la ricostruzione della superficie che possiamo osservare nell'immagine sotto



e, rappresentando graficamente la differenza $u(x, y) - \tilde{u}(x, y)$, dove \tilde{u} rappresenta la superficie ricostruita, otteniamo



che va a rappresentare l'errore ottenuto dalla ricostruzione. Questo mostra che l'accuratezza dell'algoritmo è abbastanza buona.

Andiamo quindi ora ad applicare il metodo a due oggetti reali.

2.2 Ricostruzione di una conchiglia

Il primo oggetto reale di cui andiamo a ricostruire la forma è una conchiglia, con una larghezza approssimativa di 10 cm. Questo dataset è stato usato per la prima volta in [8]. Essa è stata posta su una piattaforma piatta ruotante a sfondo scuro, questo per riprodurre le condizioni a contorno di Dirichlet. La macchina fotografica è stata posizionata su un cavalletto ad una distanza di un metro dalla conchiglia e tutto il sistema è stato posto in uno spazio aperto in modo da utilizzare come sorgente luminosa il sole. Questo permette di supporre che i raggi arrivino paralleli alla superficie e che sia soddisfatta la condizione sulla sorgente richiesta dal modello di Lambert.

Di seguito una foto che mostra la configurazione del sistema.

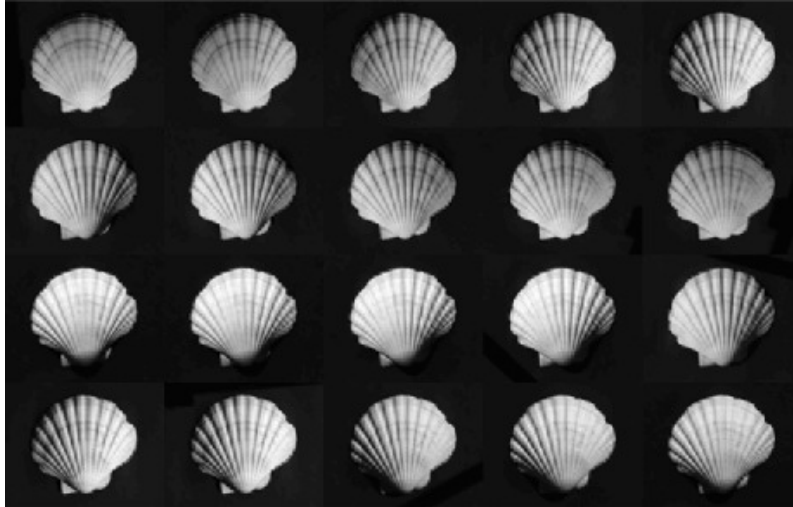


Facendo ruotare la piattaforma sono state acquisite 20 foto che andranno a comporre il nostro dataset di immagini. Ciascuna immagine avrà dimensione 4012×6016 e, utilizzando un righello posto accanto alla conchiglia, è possibile determinare il numero di pixel presenti in $x = 10$ cm. Questo ci è utile per la determinazione della lunghezza orizzontale A che sarà pari a

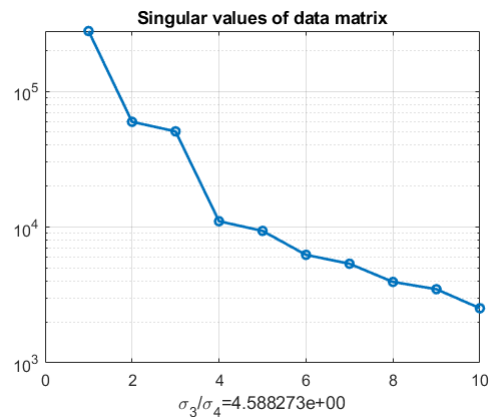
$$A = \frac{\text{n}^\circ \text{ colonne}}{\text{n}^\circ \text{ pixel}} x,$$

in questo caso abbiamo che $A = 25,34$ cm.

Consideriamo in questo caso 10 delle 20 immagini (nel capitolo successivo ne spiega il motivo) che riportiamo sotto

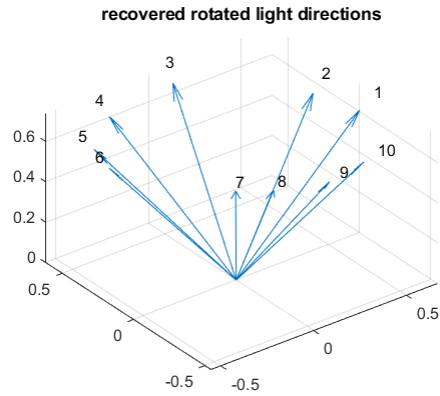


É però necessaria un'elaborazione preliminare delle foto. Infatti durante l'acquisizione, poiché andiamo a ruotare la piattaforma, anche una piccola vibrazione può portare a degli spostamenti che, seppur infinitesimi, vanno ad inficiare sul risultato ottenuto. Si va quindi a costruire un *offset*, cercando nella conchiglia un dettaglio (nel nostro caso una piccola macchia) di cui andiamo a determinare le coordinate. Tramite queste andiamo a traslare le immagini in modo da avere un dataset in cui quel dettaglio ha sempre la stessa posizione. Dopo aver fatto ciò possiamo quindi applicare l'algoritmo. Inizialmente avremo che i valori singolari, rappresentati graficamente, sono i seguenti

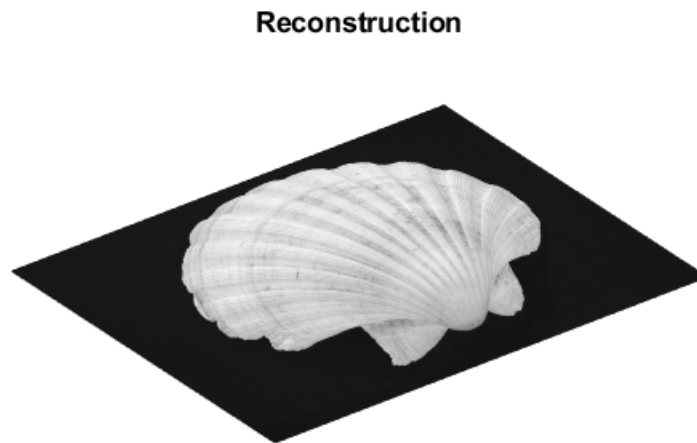


Il rapporto tra il terzo e il quarto valore singolare è una quantità abbastanza grande ma i due valori non sono comunque molto lontani, segno che l'approssimazione a rango 3 non sia buona.

Rappresentando graficamente le luci ottenute abbiamo



e infine la superficie ricostruita dall'algoritmo è la seguente



Possiamo osservare come questa ricostruzione sia molto fedele all'oggetto.

2.3 Le Domus de Janas di Pimentel

Nella seconda applicazione andremo a tentare di ricostruire la forma di un'incisione parietale presente nelle Domus de Janas di Pimentel.

Le Domus de Janas sono delle tombe risalenti all'età prenuragica presenti un tutta la Sardegna. Esse sono costituite da stanze scavate nella roccia comunicanti tra loro, l'ingresso è molto piccolo mentre le stanze interne possono essere più o meno grandi; ogni Domus infatti è diversa

dalle altre. Nella maggior parte sono presenti delle incisioni mentre solo in alcune si trovano dei dipinti.

Nel comune di Pimentel, un paese del Sud Sardegna, sono presenti le *Domus de Janas di Corongiu*, le cui particolarità sono delle decorazioni incise e dipinte presenti sopra il portello che possiamo vedere in questa foto



Essendo queste domus molto piccole, la costruzione del dataset non è stata semplice e soprattutto non sono state rispettate tutte le condizioni richieste, ma il risultato ottenuto risulta essere comunque abbastanza buono. Il dataset è stato rilevato da docenti del gruppo di Analisi Numeric del Dipartimento durante la preparazione della tesi, nell'ambito del progetto di ricerca "Tecniche di documentazione delle incisioni parietali e rupestri eseguite in domus de janas, grotte, ripari e rocce all'aperto", condotto in collaborazione col Centro Studi Identità e Memoria (CeSim).

Per l'acquisizione delle immagini è stato posizionato il cavalletto con la macchina fotografica a (CHIEDERE DATO) dalla parete della domus. Come sorgente luminosa è stato utilizzato un flash che, partendo da destra, è stato spostato attorno alla fotocamera in senso antiorario in modo da ottenere immagini illuminate da direzioni distinte. Sono state individuate due aree

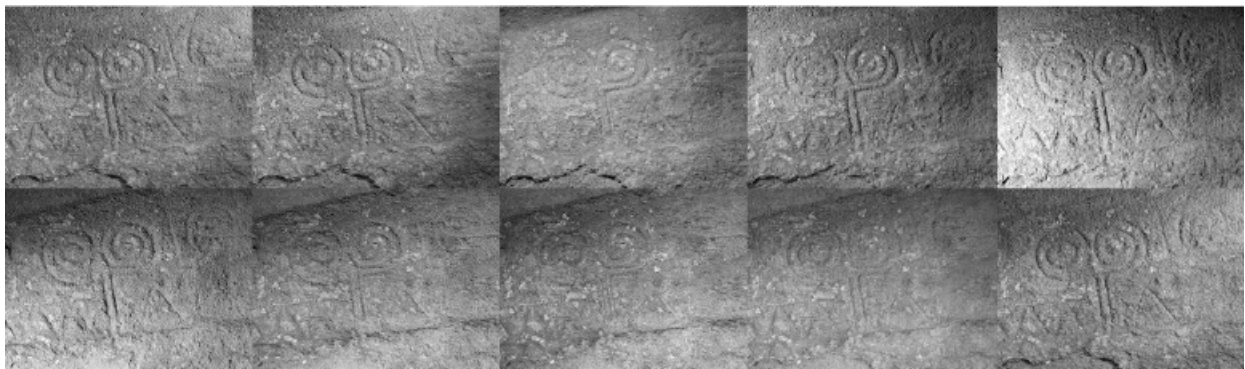
contenenti due incisioni diverse ed sono quindi stati costruiti due dataset di immagini. Vediamo ora le due ricostruzioni ottenute.

Prima ricostruzione

In questa prima ricostruzione ci si è concentrati su questo particolare dettaglio dell'incisione

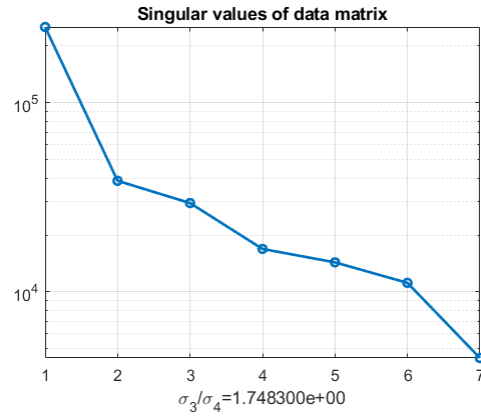


Per il dataset sono state raccolte 10 immagini di cui ne utilizziamo però solo 7 per la ricostruzione, che sono le seguenti



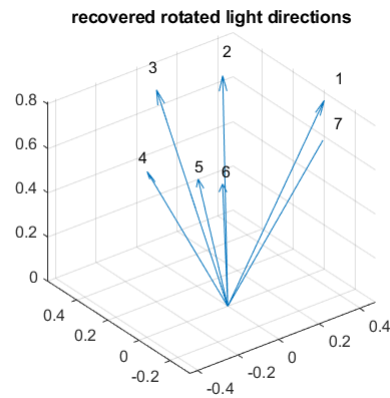
Anche in questo caso le immagini sono state prima elaborate al fine di eliminare anche spostamenti infinitesimi dell'immagine. Ciascuna immagine ha dimensione 851×626 e la lunghezza orizzontale è pari a $A = 85,94$ cm.

Applicando quindi l'algoritmo a questo dataset abbiamo che i valori singolari ottenuti dalla fattorizzazione sono



Osserviamo che il rapporto tra terzo e quarto valore è molto piccolo, segno che l'approssimazione a rango 3 non sia una buona approssimazione.

Se andiamo a rappresentare le luci ricostruite dall'algorithm abbiamo



che portano poi ad una ricostruzione della superficie data da



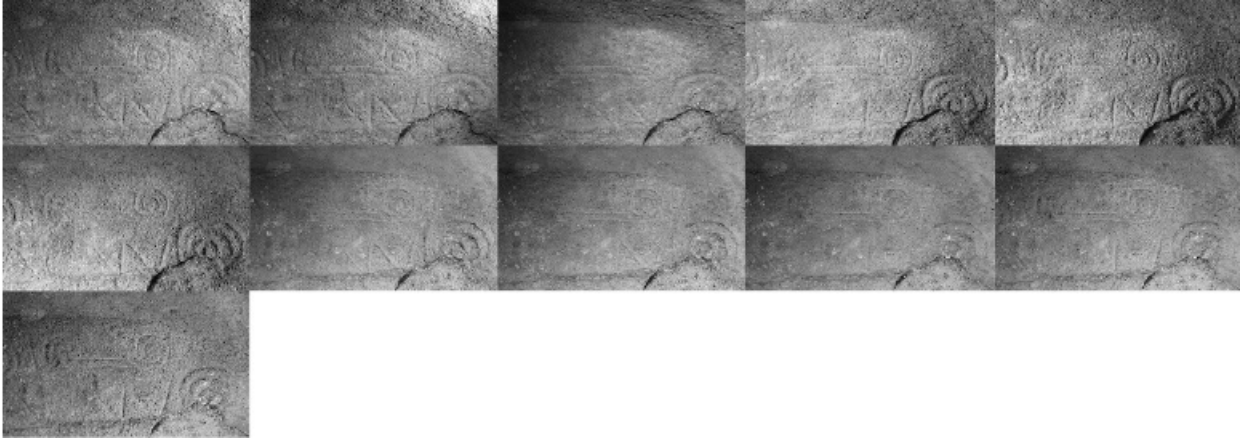
che risulta essere una buona ricostruzione dell'incisione. Possiamo quindi già iniziare ad osservare che l'approssimazione a rango 3, pur non essendo esatta, porta comunque ad una buona ricostruzione dell'oggetto.

Seconda ricostruzione

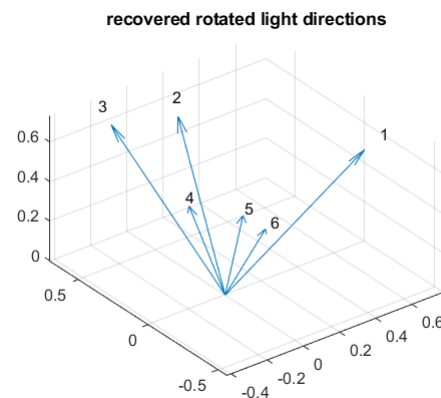
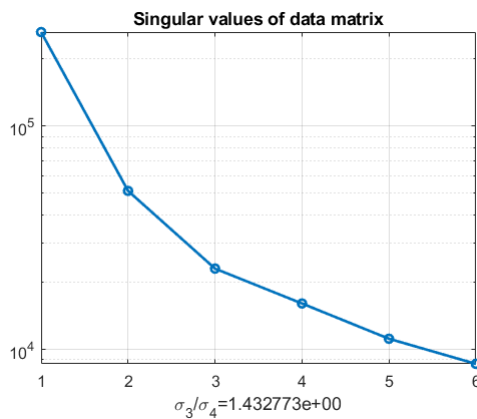
In questo caso invece ci si è concentrati su questo dettaglio



Il dataset è composto da 11 immagini che sono



Di queste sono state utilizzate solo 6 immagini. Applicando l'algoritmo a queste immagini otteniamo i seguenti valori singolari e la seguente ricostruzione delle luci



Osserviamo che anche in questo caso l'approssimazione a rango 3 non è esatta, in quanto i valori singolari dal quarto al settimo non sono quasi nulli.

La ricostruzione ottenuta dall'algoritmo risulta essere buona anche se peggiore della prova precedente



Capitolo 3

Idealità dei dati

In questo capitolo andremo a parlare delle problematiche affrontate durante l'applicazione del metodo. Le condizioni richieste per la sua applicazione, infatti, non sono state completamente rispettate per questioni sia teoriche che pratiche. Analizzeremo quindi ciascuna problematica in modo che ne rimanga traccia anche se, di alcune, non è stata ancora trovata una soluzione. Il punto chiave di questa analisi saranno le immagini utilizzate per la ricostruzione; vedremo infatti come anche solo un'immagine possa modificare completamente la soluzione, segno che la loro acquisizione non possa essere fatta senza attenzione e che la costruzione di un dataset ideale per la ricostruzione non sia semplice.

L'analisi è stata fatta preliminarmente sui dataset della conchiglia, che erano dati già presenti in quanto utilizzati in [3]. Sono state poi acquisite le foto delle incisioni di Pimentel e su di esse si è cercato non solo di utilizzare le osservazioni già fatte per ottenere, in partenza, un risultato migliore, ma anche di ottenere nuove informazioni mediante un'analisi dei loro risultati.

3.1 Impostazioni della macchina fotografica

Tutte le foto utilizzate per la ricostruzione sono nel formato digitale RAW, che risulta essere il migliore. Questo è un formato di tipo “grezzo”, in cui non viene eseguito preliminarmente nessun tipo di modifica o compressione che vada a deteriorare le informazioni.

Sappiamo che i dati memorizzati dalla fotocamera corrispondono alla digitalizzazione del flusso luminoso incidente il sensore fotografico. Questo è costituito da tanti fotositi (formati da

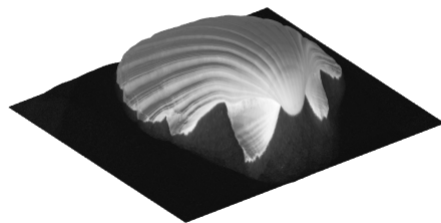
elementi fotosensibili in grado di trasformare un flusso luminoso in un segnale elettrico) ciascuno formato da tre componenti, Red, Green e Blue, che registrano la luminosità relativa a quella particolare componente cromatica. Partendo dai dati grezzi si estraggono tutte le componenti cromatiche di ciascun pixel, usando per le informazioni mancanti quelle dei fotositi adiacenti.

Ogni macchina fotografica però contiene al suo interno dei software che immediatamente dopo aver eseguito lo scatto, durante il salvataggio dell'immagine, elaborano i dati in modo da migliorare l'immagine. Questi tools risultano essere però uno svantaggio per il nostro studio. Abbiamo infatti bisogno di dati puri, che non siano modificati, in quanto ciascun cambiamento nei valori va ad inficiare sulla ricostruzione dell'oggetto. Queste considerazioni nascono da un'osservazione fatta durante la ricostruzione della conchiglia.

Osserviamo preliminarmente che, nell'algoritmo, durante il caricamento le foto sono state trasformate in scala di grigio e riscalate al fine di avere una risoluzione dell'immagine del 25%.

Un primo dataset è stato realizzato con l'uso di una macchina fotografica diversa da quella sopra citata. È stata usata infatti una (CHIEDERE DATO), che risulta essere meno recente della Canon e che quindi elabora l'immagine modificando meno i dati. La ricostruzione ottenuta da questi dati risulta essere migliore delle successive. Il primo invece ottenuto con la Canon è stato costruito senza modificare le impostazioni della macchina fotografica, utilizzando cioè quelle preimpostate. La ricostruzione ottenuta però risulta essere la peggiore, in particolare risulta essere molto più bombata delle altre come possiamo vedere in figura

Reconstruction



Andando invece a modificare le impostazioni, come è stato fatto nel terzo set di immagini

che è quello utilizzato nella trattazione sopra, si osserva che la ricostruzione risulta essere migliore.

Tutte queste considerazioni sono fatte a meno di altre osservazioni di cui però ci occuperemo in seguito. Per ora ci basti osservare che pur utilizzando come formato digitale il RAW, che è quello che preserva al meglio i dati puri, se non si vanno a modificare alcune impostazioni della fotocamera si ottiene un dato che può essere molto lontano dal dato reale e che porta quindi ad una ricostruzione inesatta dell'oggetto.

Le impostazioni che siamo andati a modificare sono le seguenti:

- Compensazione dell'esposizione: consiste nello stabilire la quantità di luce che deve assorbire il sensore rispetto a quella stimata dalla fotocamera.
- Rotazione automatica: fa in modo che l'immagine verticale venga automaticamente ruotata nell'orientamento più adatto alla visualizzazione.
- Correzione automatica della luminosità: nel caso di immagine scura o con contrasto basso, permette di correggere automaticamente la luminosità e il contrasto.
- Stile della foto: in base alla tipologia scelta si ottengono diverse caratteristiche dell'immagine. Scegliendo la modalità *immagine fedele* si ottengono immagini dai colori tenui con livelli bassi di luminosità e saturazione dei colori.
- Bilanciamento del bianco: nella fotocamera il bianco da utilizzare come base per la correzione del colore viene deciso in base alla temperatura del colore dell'illuminazione, quindi il colore viene regolato mediante un software che rende nitido il colore delle aree bianche.
- Sensibilità ISO: è la sensibilità alla luce del sensore immagine. La sensibilità bassa riduce il rumore dell'immagine ma può aumentare il rischio di vibrazioni della camera con conseguente sfocatura dell'immagine; quella alta consente di acquisire buone immagini anche in condizioni di scarsa illuminazione ma aumenta il rumore.

Abbiamo modificato queste impostazioni in modo da ottenere un'immagine con informazioni meno distorte, ma non sappiamo ad oggi se sia necessario settare diversamente altre impostazioni per migliorare ancora di più l'acquisizione delle foto.

3.2 Analisi dei valori singolari

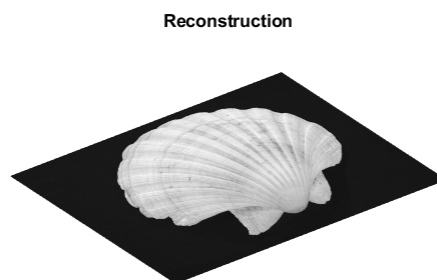
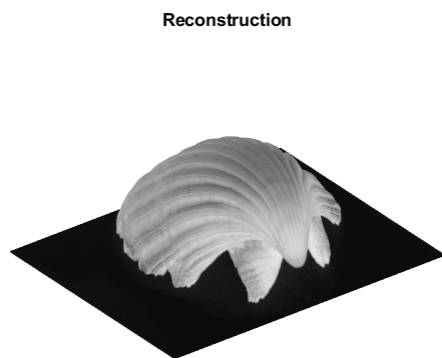
Durante tutto lo studio ci siamo concentrati sull'analisi dei valori singolari della matrice M in quanto abbiamo fatto un'approssimazione teorica importante. Considerando la SVD troncata, infatti, abbiamo supposto nulli i valori singolari successivi al terzo; questa è una condizione ideale che, se rispettata, porta ad una ricostruzione esatta della matrice e quindi ad una riproduzione accurata dell'oggetto, come si può osservare nel caso di dati sintetici.

Nelle prove numeriche basate su dati reali invece questa condizione non è mai soddisfatta, anzi tendenzialmente la matrice presenta valori singolari molto maggiori di zero. Inoltre il rapporto tra terzo e quarto valore singolare risulta spesso molto piccolo, segno che questi due valori siano molto vicini.

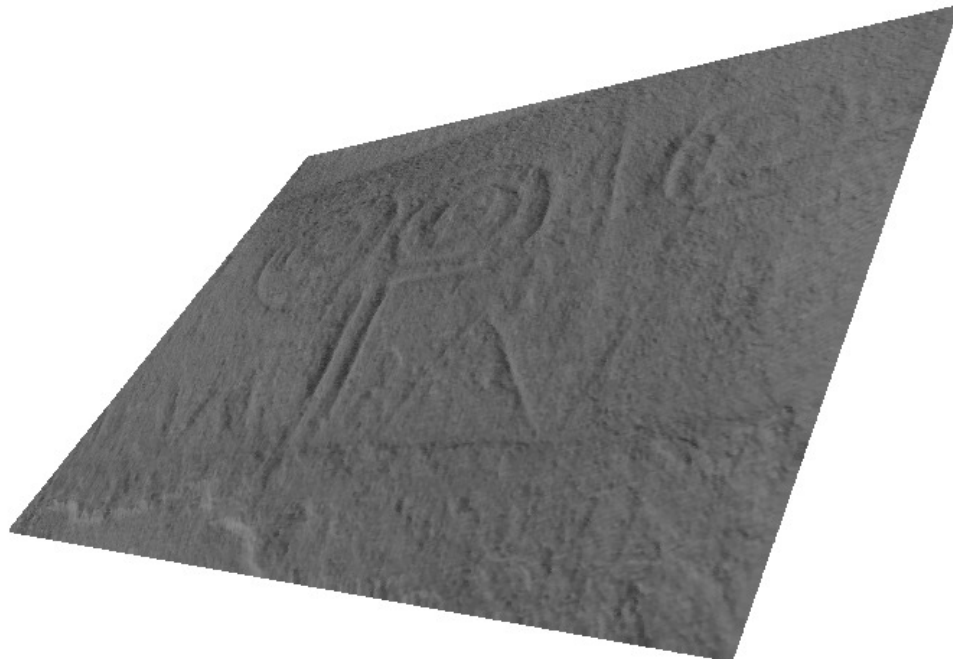
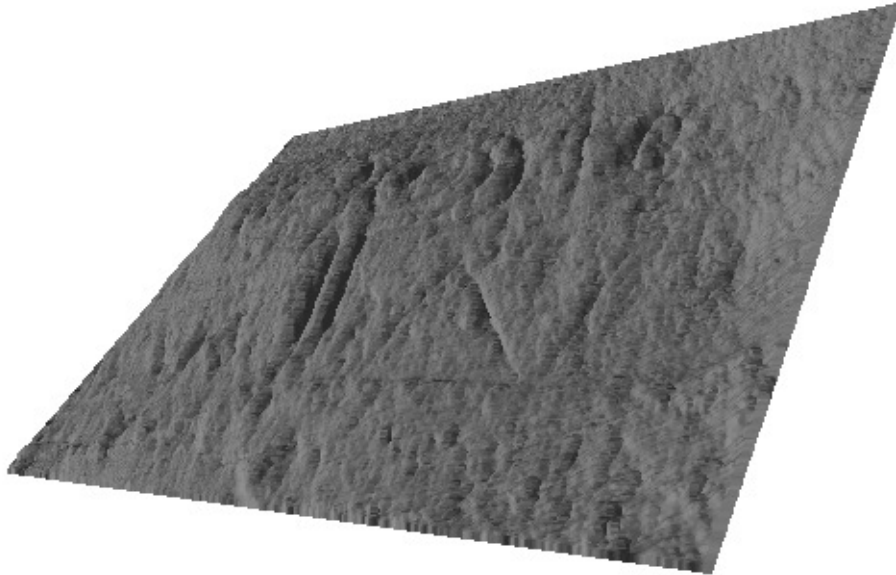
Una prova fatta è stata quella di cercare dei sottoinsiemi di immagini in cui questo rapporto risultava molto grande e in cui, quindi, la matrice delle immagini M possedeva $\sigma_4, \dots, \sigma_q$ molto piccoli e quasi nulli. È stato possibile determinare set di immagini in cui il rapporto tra terzo e quarto valore singolare aumenta, ma si osserva che in nessun caso quei valori sono piccoli e quindi approssimabili con zero.

Come ci si aspetta, in alcuni casi l'aumento del rapporto $\frac{\sigma_3}{\sigma_4}$ porta ad un miglioramento della ricostruzione, ma in altri si ottiene un peggioramento, come avviene nei due esempi successivi:

- In questo caso abbiamo due set di immagini della conchiglia diversi: nel primo il rapporto è di 4.60, nel secondo di 4.58



- Qui invece abbiamo due diversi set delle prime incisioni di Pimentel: il primo ha un rapporto di 1.86, il secondo 1.74

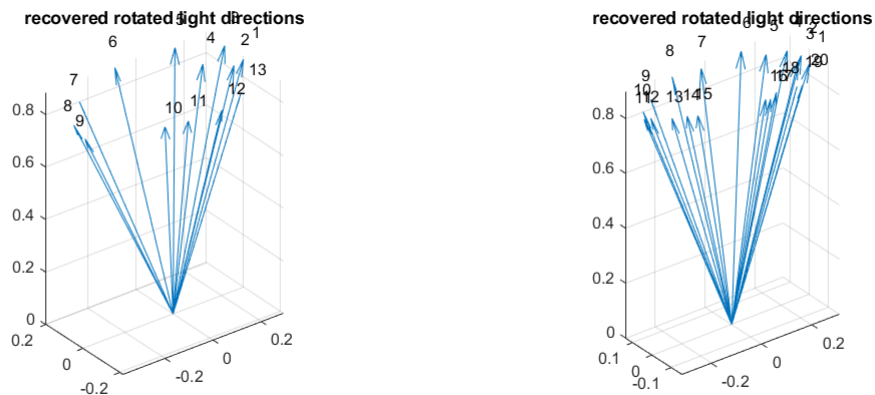


Osserviamo come, inaspettatamente, la ricostruzione migliore in entrambi i casi è quella in cui il rapporto è minore.

Questo ci porta a concludere che il rapporto tra i valori singolari non sia in generale un buon indicatore per la determinazione di un dataset di immagini ideale.

3.3 Lunghezza del vettore luce

Come abbiamo già osservato sopra, in alcune ricostruzioni si ottiene una forma dell'oggetto bombata. In questi casi i vettori luce ricostruiti risultano essere molto allungati, come nelle due sottostanti ricostruzioni della conchiglia (ottenute mediante due dataset diversi)



Sembra quindi che i vettori risultino essere spostati verso l'alto e questo porta ad una ricostruzione inesatta.

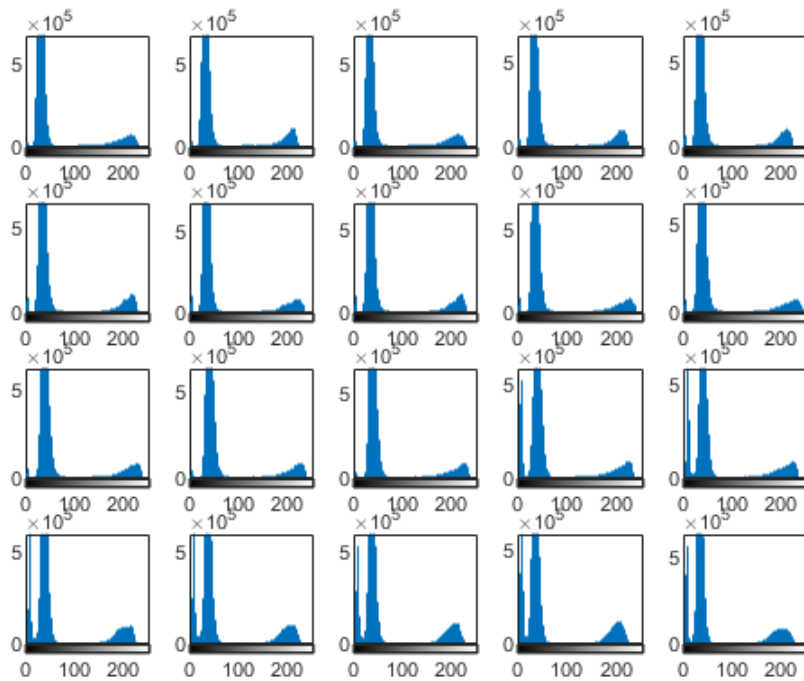
Ci siamo resi conto di questa problematica quando abbiamo utilizzato, per la ricostruzione, il primo dataset di immagini della conchiglia ottenuto utilizzando la Canon. In questo caso la conchiglia risultava troppo bombata e pur modificando i set di immagini considerati la soluzione non migliorava se non di pochissimo.

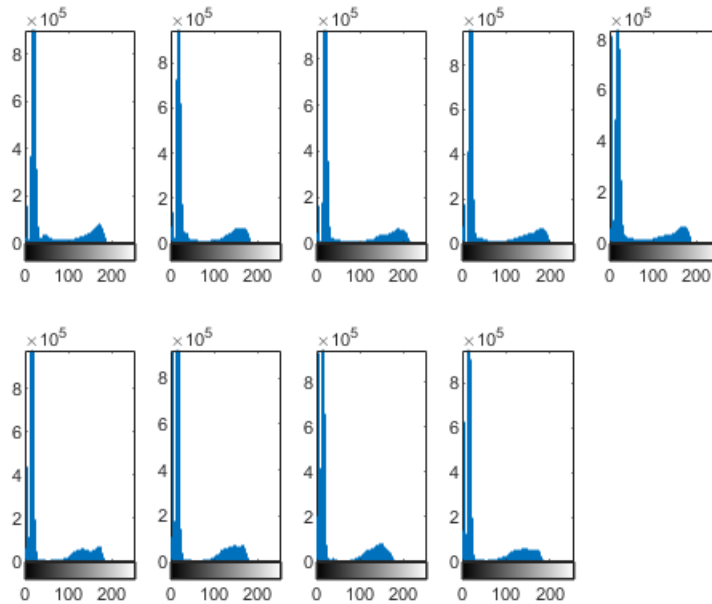
Un'idea è stata quella di modificare la componente z dei vettori luce: in questo caso la ricostruzione migliora, ma a priori non possiamo sapere di quanto questa debba essere scalata e soprattutto in quali casi sia necessario farlo e in quali no. Quindi questa strada non può essere utilizzata per cercare di migliorare la ricostruzione.

Ci siamo allora concentrati sulle immagini e sul capire come sceglierle in modo da ottenere una ricostruzione il più possibile vicina all'oggetto. Osservando le immagini della conchiglia e confrontando i vari dataset tra loro ci siamo accorti che nel primo set acquisito con la Canon le immagini risultano molto più luminose rispetto alle altre.

Per il confronto abbiamo utilizzato l'Istogramma, che va a rappresentare graficamente la di-

stribuzione dei pixel in base alla loro luminosità. Esso è costituito da due assi perpendicolari: sull'asse delle ascisse viene indicata la gamma di colori che va da 0, il nero assoluto, a 255, il bianco puro; sull'asse delle ordinate viene indicata la quantità di pixel per ciascuna tonalità. Facendo quindi un confronto tra gli istogrammi delle immagini del primo e del secondo dataset della conchiglia (ovvero quello ottenuto senza e con la modifica delle impostazioni della fotocamera), utilizzando in Matlab il comando *imhist*, si è ottenuto il seguente risultato

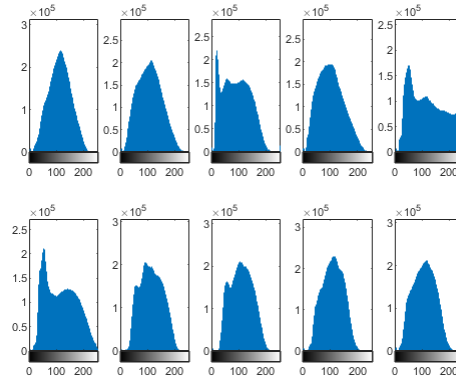




Abbiamo trasformato le immagini in scala di grigi, quindi avremo che il valori delle tonalità andranno da 0 (nero) a 256 (bianco).

Confrontando i due set di istogrammi possiamo notare che nel secondo la tonalità più chiara è inferiore ai 200, mentre nel primo, in tutti gli istogrammi, abbiamo che si arriva quasi al bianco puro e l'area individuata dall'istogramma in queste zone è significativamente importante, segno che il numero di pixel con questa tonalità è molto maggiore che nell'altro caso. Questo può significare che le impostazioni che non sono state modificate nella fotocamera in quel caso sono andate ad influire significativamente nei dati e quindi nella ricostruzione. Questo può quindi essere un buon indicatore per la valutazione delle foto.

Andando poi a lavorare sulle incisioni, nel caso di ricostruzioni inesatte, si è andato anche a studiare l'istogramma delle foto andando a scartare quelle che presentavano una percentuale di toni bianchi maggiore. L'istogramma delle immagini della prima incisione è il seguente



Osserviamo che la quinta presenta una grossa quantità di pixel chiari che quindi scartiamo, mentre le prima e la nona hanno dei picchi nella zona centrale maggiori degli altri, quindi proviamo a scartare anche queste due immagini. Il risultato ottenuto scartando queste foto è il migliore, quindi questo può essere un buon modo per individuare dataset ottimali per la ricostruzione.

3.4 Il problema dell'idealità dei dati

In questo capitolo affronteremo un risultato inaspettato presentatosi durante l'applicazione del metodo.

Prima di ciò facciamo un'osservazione sulle conclusioni di Hayakawa [4]. I risultati sopra ottenuti, infatti, sono stati ricavati senza essere a conoscenza di questo articolo, che è stato individuato successivamente. Durante un confronto tra i due abbiamo notato che l'autore commette un errore nel calcolo.

Esso va infatti a determinare una matrice, che corrisponde alla nostra G , e di questa ne calcola la SVD. Questa matrice, come abbiamo visto, per costruzione è simmetrica e quindi l'autore impone che la SVD sia data da $B = V\Sigma V^T$.

Ragiona infatti in questo modo: poiché la matrice è simmetrica si ha che

$$G^T = G \Rightarrow U\Sigma V^T = V\Sigma U^T$$

da cui ricava che $U = V$ senza però richiedere che la matrice sia definita positiva e questo non è possibile. Bisogna necessariamente richiedere ciò per poter giungere a questa conclusione.

L'approssimazione fatta ponendo $B = V\Sigma^{1/2}$ non è quindi esatta.

Passiamo ora al problema principale di questa sezione.

Durante l'applicazione, utilizzando alcuni sottoinsiemi di immagini non è stato possibile determinare la ricostruzione dell'oggetto in quando si otteneva che la matrice G , determinata mediante il Teorema 1, risultava essere non definita positiva.

Ricordandone la dimostrazione, abbiamo cercato una matrice B tale che $\|Bz\| = 1$, in questo modo abbiamo determinato $G = B^T B$, infatti

$$\|Bz\| = 1 \Rightarrow z^T B^T B z = 1 \Rightarrow z^T G z = 1.$$

Abbiamo che G è simmetrica per costruzione e deve necessariamente essere definita positiva in quanto, preso un qualsiasi vettore non nullo x , si ha che

$$x^T G x = x^T B^T B x = \|Bx\|^2 \geq 0.$$

Per cercare di capire le motivazioni alla base di questo risultato abbiamo pensato di confrontare i valori singolari della matrice M con gli autovalori della matrice G . Si è osservato che, nella maggior parte dei casi, se il primo valore singolare supera una certa quantità (che non può essere determinata in maniera univoca in quanto non abbiamo a disposizione abbastanza dati) si avrà almeno un autovalore negativo. Già all'inizio allora si può andare a valutare questo dato per capire se ci si possa aspettare o meno una matrice definita positiva, anche se vi sono alcune eccezioni in cui questo non accade. Questa quindi non può essere considerata una regola generale da utilizzare.

Si è quindi arrivati alla formulazione di una congettura relativa a questo problema, che sarà oggetto di studi successivi.

Congettura sull'idealità dei dati

Supponiamo di avere q vettori z_t . Allora non esiste sempre una matrice B tale che $G = B^T B$ sia definita positiva.

Ci chiediamo quindi sotto quali condizioni esiste B tale da soddisfare questa condizione. In particolare, poiché abbiamo visto che $B = QR$, vogliamo capire sotto quali condizioni esiste la matrice R , che è quella che viene poi utilizzata nel calcolo.

Un tentativo fatto è stato quello di analizzare la matrice H definita in (1.22): essa infatti è quella che contiene i vettori z_t e che determina le soluzioni di $Hg = 1$, da cui ricaviamo le entrate di G .

Numericamente si osserva che eliminando da H la t -esima riga, corrispondente all'immagine che (in base alle osservazioni fatte sopra) risulta non essere buona, si ottiene una matrice G definita positiva.

Conclusioni

Dopo aver trattato tutti gli aspetti possiamo trarre diverse conclusioni in merito a questo metodo. Pur avendo ottenuto delle buone ricostruzioni degli oggetti studiati, vi sono ancora alcune considerazioni da fare e alcune problematiche da affrontare.

In primo luogo è necessario comprendere appieno tutti i tools della macchina fotografica per poterli settare in modo che la foto ottenuta sia il più possibile priva di modifiche. In secondo luogo bisogna capire affondo come determinare il set di immagini migliore, capire quindi come scegliere ciascuna immagine in base alle sue informazioni.

Si ha necessità inoltre di capire cosa influenza la distorsione nella ricostruzione delle luci, quali dati portano ad una costruzione esatta e se nel caso è possibile migliorare ulteriormente la ricostruzione. Un altro punto è capire quali condizioni sono necessarie affinché esista la matrice B , che permette quindi di poter intervenire a priori sul set di immagini per determinare una ricostruzione esatta dell'oggetto.

Ringraziamenti

Ringrazio il professor Giuseppe Rodriguez per avermi seguito durante questo lavoro e soprattutto per avermi dato l'opportunità di lavorare a questo progetto, che unisce due interessi per me molto importanti: la matematica e le bellezze della mia terra.

Ringrazio anche la professoressa Giuseppa Tanda del CeSim- Centro Studi Identità e "Memoria"- per aver indicato il sito e per aver motivato questo lavoro.

Ringrazio la mia famiglia, il mio fidanzato, i miei amici e i miei colleghi più cari per essermi stati sempre accanto durante questo percorso, per avermi sostenuto e motivato. Senza di voi oggi non sarei qui, quindi grazie per tutto quello che avete fatto per me.

Bibliografia

- [1] S. Barsky e M. Petrou. «The 4-source photometric stereo technique for three-dimensional surfaces in the presence of highlights and shadows». *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 25.10 (2003), pp. 1239–1252.
- [2] P. N. Belhumeur, D. J. Kriegman e A. L. Yuille. «The bas-relief ambiguity». *Int. J. Comput. Vis.* 35.1 (1999), pp. 33–44.
- [3] A. Concas, R. Dessì, C. Fenu, G. Rodriguez e M. Vanzi. «Identifying the lights position in photometric stereo under unknown lighting». *2021 21st International Conference on Computational Science and Its Applications (ICCSA)*. DOI: 10.1109/ICCSA54496.2021.00014. Cagliari, Italy, set. 2021, pp. 10–20.
- [4] H. Hayakawa. «Photometric stereo under a light source with arbitrary motion». *J. Opt. Soc. Am. A-Opt. Image Sci. Vis.* 11.11 (1994), pp. 3079–3089.
- [5] B. K. P. Horn. «Obtaining shape from shading information». *Shape from Shading*. MIT Press. 1989, pp. 123–171.
- [6] *Matlab ver. 8.4*. The MathWorks, Inc. Natick, MA, 2014.
- [7] R. Mecca e J.-D. Durou. «Unambiguous photometric stereo using two images». *International Conference on Image Analysis and Processing*. Springer. 2011, pp. 286–295.
- [8] G. Radow, G. Rodriguez, A. Mansouri Yarahmadi e M. Breuß. «Photometric stereo with non-Lambertian preprocessing and Hayakawa lighting estimation for highly detailed shape reconstruction». *Mathematical Methods for Object Reconstruction: from 3D Vision to 3D Printing*. A cura di E. Cristiani, M. Falcone e S. Tozza. To appear. Springer, 2023.

- [9] R. J. Woodham. «Photometric method for determining surface orientation from multiple images». *Opt. Eng.* 19.1 (1980), pp. 191139–191139.