



Università degli studi di Cagliari

Facoltà di Scienze

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

**Metodi di quadratura numerica con applicazioni
ad equazioni integrali di secondo tipo**

Relatori

Prof.ssa Luisa Fermo
Prof. Giuseppe Rodriguez

Tesi di Laurea Magistrale

Alessandra Di Berardino

ANNO ACCADEMICO 2017-2018

*A mia madre
che mi ha accompagnato lungo questo percorso
e mi ha dato la forza per non mollare.*

Ringraziamenti

Come prima persona vorrei ringraziare colei che ha permesso tutto questo, ovvero mia madre. Grazie di cuore per avermi sostenuto e per avermi spronato ad andare avanti in modo da completare il mio percorso.

Un grazie anche alle mie sorelle che mi sono sempre state affianco.

Un grandissimo grazie al mio fidanzato Gabriele per essermi stato vicino in questo periodo difficile e pieno di pura follia.

Grazie ai colleghi. Sempre presenti e disponibili, che mi hanno dato una mano con consigli e i loro meravigliosi appunti, grazie alla quale ho avuto la possibilità di superare l'insuperabile.

Un grazie di cuore alla Professoressa Fermo e al Professor Rodriguez che mi hanno guidato nella scrittura di questa bellissima tesi.

Indice

Introduzione	1
1 Integrazione Numerica	2
1.1 Formule di Newton Cotes	4
1.1.1 Regola del rettangolo o del punto medio	5
1.1.2 Regola del Trapezio	6
1.1.3 Regola di Simpson	6
1.2 Formula Gaussiana	7
1.3 Prove numeriche	9
2 Equazioni Integrali	11
2.1 Equazioni integrali di Fredholm di seconda specie	13
2.2 Metodo di quadratura	14
2.3 Esempi numerici	15
Bibliografia	18

Introduzione

Lo scopo ultimo della mia tesi é la risoluzione numerica di equazioni integrali di Fredholm di seconda specie, ossia equazioni la cui funzione incognita compare anche sotto il segno di integrale.

Molti matematici hanno iniziato ad interessarsi alle equazioni integrali di Fredholm di seconda specie, fin dagli inizi del '900 e oggi l'interesse in tali equazioni è cresciuto notevolmente: tali equazioni infatti intervengono in notevoli contesti della matematica applicata, in quanto molti modelli matematici riconducibili a eventi fisici possono scriversi in termini di equazioni integrali.

Nel primo capitolo analizzeremo i diversi metodi numerici per approssimare un integrale in un generico intervallo $[a,b]$: i metodi di quadratura analizzati sono le formule di Newton-Cotes e la ben nota formula Gaussiana. Nel secondo capitolo, dopo una breve classificazione dell'equazioni integrali, analizzeremo il metodo di Nyström e ne verificheremo l'efficienza con dei test numerici.

Da un punto di vista teorico, Ivar Fredholm fu il primo a stabilire le condizioni necessarie e sufficienti a determinare l'esistenza e l'unicità della soluzione di un'equazione integrale; invece, da un punto di vista numerico, diversi sono i metodi numerici che sono stati sviluppati a seconda delle caratteristiche delle funzioni note e del dominio su cui queste equazioni sono definite.

In questa tesi considereremo equazioni integrali definite su intervalli limitati e funzioni note che possono avere singolarità algebriche agli estremi dell'intervallo: nello specifico analizzeremo funzioni analitiche per poi passare a quelle meno regolari, in modo da confrontare le stime teoriche con quelle numeriche e mostrare la convergenza dei metodi utilizzati.

Capitolo 1

Integrazione Numerica

L'integrazione numerica o quadratura numerica consiste in una serie di metodi che permettono di stimare il valore dell' integrale

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

dove f è integrabile in un intervallo limitato o illimitato $[a, b]$.

Prendono il loro nome da un problema antico della matematica: la quadratura del cerchio. Esso consisteva nella costruzione del quadrato equivalente ad un cerchio assegnato, che corrisponde a misurare l'area della figura.

L'idea è quella di approssimare l'integrale mediante una combinazione lineare dei valori assunti dalla funzione integranda in determinati punti appartenenti all'intervallo di integrazione, per opportuni coefficienti. Una generica **formula di quadratura** è della forma

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f(x_j)$$

dove $\{x_j\}_{j=1}^n$ sono detti **nodi di quadratura** e $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ sono denominati **pesi o coefficienti della quadratura**.

Tale formula è detta **chiusa** se $x_1 \equiv a$ e $x_n \equiv b$, cioè se gli estremi dell'intervallo di definizione della funzione integranda sono nodi di quadratura. Al contrario, è detta **aperta** se

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b.$$

L'esigenza di costruire formule di quadratura sorge quando non è possibile calcolare l'integrale per via analitica, come ad esempio in questo caso

$$\int_a^b e^{-x^2} dx,$$

oppure quando la funzione integranda è nota solo in un insieme di dati discreti.

Il modo più semplice per costruire una formula di quadratura su n punti è quella di approssimare la funzione integranda f con un polinomio di grado $n - 1$, ad esempio, con il polinomio interpolante di Lagrange che è della forma

$$L_n(f, x) = \sum_{j=1}^n l_j(x) f(x_j),$$

dove

$$l_j(x) = \prod_{k=1, k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

sono i cosiddetti polinomi fondamentali di Lagrange aventi grado $n - 1$ e tali per cui si ha

$$l_j(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k. \end{cases}$$

In questo modo, denotando con $E_n(f, x)$ l'errore che si commette in tale approssimazione si ha

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) dx = \int_a^b [L_n(f, x) + E_n(f, x)] dx \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j f(x_j) + R_n(f) \\ &=: I_n(f) + R_n(f), \end{aligned} \tag{1.1}$$

dove $\alpha_j = \int_a^b l_j(x) dx$ e $R_n(f) = \int_a^b E_n(f, x) dx$ è il cosiddetto **termine resto** ossia l'errore della formula di quadratura, cioè l'errore che si commette nell'approssimare l'integrale con la formula $I_n(f)$.

Le formule così costruite vengono dette **interpolatorie** visto che la funzione f è stata approssimata con un polinomio interpolante, cioè con un polinomio tale che

$$L_n(f, x_j) = f(x_j).$$

Per tutte le formule interpolatorie valgono le seguenti definizioni.

Definizione 1. La formula di quadratura $I_n(f)$ definita in (1.1) ha grado di esattezza o precisione p se

$$\begin{cases} R_n(x^k) = 0 & \text{se } k = 0, \dots, p \\ R_n(x^k) \neq 0 & \text{se } k > p \end{cases}$$

dove R_n è il termine resto introdotto in (1.1).

Definizione 2. La formula di quadratura $I_n(f)$ introdotta in (1.1) è convergente se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(f) = 0.$$

Per la convergenza della formula di quadratura vale il seguente teorema.

Teorema 1. Sia $I_n(f)$ la formula interpolatoria definita in (1.1). Se

i) $I_n(f)$ ha grado di esattezza $n - 1$,

ii) $\sum_{j=1}^n |\alpha_j| < \infty$,

allora la formula di quadratura è convergente.

Fissati arbitrariamente n nodi x_j e imponendo che la formula abbia grado di precisione $n - 1$, cioè

$$I_n(x^i) = I(x^i), \quad \text{per } i = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (1.2)$$

è possibile determinare i pesi α_j . Infatti dalla relazione (1.2) si ottiene il sistema lineare

$$\mathbf{V}\alpha = b,$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

è la matrice di Vandermonde, $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$ è il vettore delle incognite e b è il vettore dei termini noti. Questo è il così detto **metodo dei coefficienti indeterminati** che pur fornendo un modo semplice per determinare i coefficienti, non è conveniente da un punto di vista numerico. Come è noto infatti la matrice dei coefficienti è mal condizionata e quindi la soluzione del sistema è inaccurata soprattutto quando n aumenta.

Diversi autori hanno proposto altri approcci che conducono a formule di quadratura interpolatorie. Queste si suddividono in

- **formule di Newton-Cotes** i cui nodi di quadratura sono nodi equidistanti;
- **formule gaussiane** i cui nodi di quadratura sono zeri di specifici polinomi ortogonali.

1.1 Formule di Newton Cotes

Supponiamo di avere n nodi equispaziati in $[a, b]$ cioè

$$x_j = a + (j - 1)h, \quad \text{con } h = \frac{b - a}{n - 1}.$$

Le formule di Newton-Cotes più note sono quella del rettangolo o del punto medio, quella del Trapezio e di Simpson.

Queste formule sono **elementari** o **composte**. Le formule elementari non sono in grado di raggiungere precisioni elevate se non in presenza di una funzione integranda molto semplice. D'altra parte aumentare il valore di n potrebbe non portare a buoni risultati. Infatti sappiamo che l'interpolazione su un numero elevato di nodi equispaziati non garantisce la convergenza dell'errore, neanche in presenza di una funzione infinitamente derivabile. Per aumentare la precisione si ricorre quindi a una strategia che sfrutta le proprietà di additività dell'integrale e che conduce alle **formule composte**. Una formula composta consiste nel calcolare ciascun integrale con una formula elementare di ordine basso, sommando successivamente le approssimazioni ottenute. In questo modo l'intervallo di integrazione viene scomposto in un grande numero di intervalli più piccoli su cui si auspica che la funzione integranda sia sufficientemente semplice da essere bene approssimata da un polinomio interpolante di grado basso.

1.1.1 Regola del rettangolo o del punto medio

E' la più semplice formula di quadratura che consiste nell'approssimare il valore dell'integrale con l'area del rettangolo che si ha sotto la curva rappresentata dalla funzione integranda definita in $[a, b]$. E' della forma

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(a) + R_0(f), \quad (1.3)$$

oppure

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(b) + R_0(f), \quad (1.4)$$

o ancora

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R_0(f). \quad (1.5)$$

E' una formula aperta con grado di esattezza zero, con errore $R_0(f)$ che dipende dall'ampiezza dell'intervallo $[a, b]$ e con ordine di convergenza pari a uno. Se l'ampiezza dell'intervallo $(b-a) > 1$, è più pratico suddividerlo in n sottointervalli aventi uguale lunghezza $h = \frac{b-a}{n}$ e applicare successivamente (1.3), (1.4) o (1.5) in ognuno dei sottointervalli. In questo modo si ottiene **la formula di quadratura del rettangolo o del punto medio composta** così fatta

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \begin{cases} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) + R_n(f), \\ \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + R_n(f), \\ \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + R_n(f). \end{cases} \quad (1.6)$$

Riguardo all'errore presente nella (1.6), se f è tale che $\int_a^b |f'(t)| dt < \infty$ allora

$$|R_0(f)| \leq (b-a) \int_a^b |f'(t)| dt.$$

Quindi

$$\begin{aligned} |R_n(f)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(x)| dx \\ &= \frac{(b-a)}{n} \int_a^b |f'(x)| dx. \end{aligned}$$

il che dimostra che l'errore ha ordine di convergenza pari a uno. E' possibile provare che se la funzione integranda è più regolare, l'errore non migliora.

1.1.2 Regola del Trapezio

E' una formula di quadratura molto usata che approssima il valore dell'integrale con l'area del trapezio che si trova sotto il grafico della curva f . La sua espressione è la seguente

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)}{2} \{f(a) + f(b)\} + R_1(f).$$

E' una formula chiusa avente grado di esattezza uno. L'ordine di convergenza dipende dalle proprietà di regolarità della funzione f . Infatti se

- $f \in C^1[(a, b)]$ allora $R_1(f)$ dipende da $\frac{b-a}{2}$;
- $f \in C^2[(a, b)]$ allora $R_1(f)$ dipende da $\frac{(b-a)^2}{2}$.

Quindi in altri termini la formula ha ordine di convergenza pari a uno nel primo caso e pari a due nel secondo.

Coma fatto per la regola dei rettangoli, una stima migliore può essere ottenuta dividendo l'intervallo $[a, b]$ in n sottointervalli equispaziati di lunghezza $h = \frac{b-a}{n}$ e applicando la formula precedente in ognuno degli n sottointervalli e poi sommando il risultato. In questo modo si ha **la regola trapezoidale composta**

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} + R_1(f) \\ &= \frac{b-a}{2n} \left\{ f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right\} + R_1(f). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'errore è possibile provare che

$$|R_1(f)| \leq \begin{cases} \frac{b-a}{2n} \int_a^b |f'(x)| dx & \text{se } \int_a^b |f'(x)| dx < \infty \\ \frac{(b-a)^2}{2n^2} \int_a^b |f''(x)| dx & \text{se } \int_a^b |f''(x)| dx < \infty. \end{cases}$$

1.1.3 Regola di Simpson

E' la formula di quadratura più frequente che approssima il valore dell'integrale con l'area della parabola che passa per gli estremi dell'intervallo e per un punto interno. Approssimiamo la funzione f usando il polinomio di Lagrange basato su 3 punti $x = a$, $x = \frac{a+b}{2}$ e $x = b$ così da poter scrivere la seguente

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^2 a_k f(x_k) + R_2(f),$$

dove

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_a^b l_0(x) dx = \frac{b-a}{6}, \\ a_1 &= \int_a^b l_1(x) dx = \frac{2(b-a)}{3}, \\ a_2 &= \int_a^b l_2(x) dx = \frac{b-a}{6}. \end{aligned}$$

E' una formula chiusa con grado di precisione due. Riguardo all'errore si ha che se $f \in C^{(4)}([a, b])$ allora

$$|R_2(f)| \leq \frac{(b-a)^4}{1158}.$$

Adesso cerchiamo di migliorare la stima dell'errore introducendo **la regola di Simpson composta**. A tal fine dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in $2n$ sottointervalli aventi la stessa lunghezza $h = \frac{b-a}{2n}$, scrivendo così

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^{2n} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx.$$

Applicando la regola di Simpson in ciascun intervallo, si ottiene la formula

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx = \frac{h}{3} \left[f(x) + 4 \sum_{i=1}^{2n} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{2n-1} f(x_{2i}) + f(b) \right].$$

Per quanto riguarda l'errore, se $\int_a^b |f^{(4)}(x)| dx < \infty$ si ha

$$|R_n(f)| \leq C \frac{(b-a)^4}{n^4},$$

dove C è una costante positiva che non dipende nè da n nè da f .

1.2 Formula Gaussiana

Supponiamo di voler approssimare il seguente integrale

$$I(f) = \int_a^b f(x) w(x) dx \tag{1.7}$$

dove f è una funzione abbastanza regolare e w è una funzione **peso**. Quest'ultima è una funzione positiva quasi ovunque in (a, b) , tale che

$$0 \leq \int_a^b w(x) dx < \infty.$$

Un tipico esempio di funzione peso nell'intervallo $[a, b]$ è il peso di Jacobi

$$v^{\alpha, \beta} = (b-x)^\alpha (x-a)^\beta \quad \text{con } \alpha, \beta > -1. \tag{1.8}$$

Al fine di approssimare l'integrale (1.7) utilizzeremo la formula di quadratura Gaussiana che consiste nell'approssimazione della funzione f con il polinomio di Lagrange basato sugli zeri del polinomio P_n ortogonale alla funzione peso w che compare nell'integrale. Indicheremo tale polinomio con

$$L_n(f, w, x) = \sum_{k=1}^n l_k(x) f(x_k)$$

dove $\{x_k\}_{k=1}^n$ sono gli zeri di $P_n(w)$ e gli l_k sono i polinomi fondamentali di Lagrange.

In questo modo avremo quindi

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) w(x) dx &= \int_a^b L_n(f, w, x) w(x) dx + e_n(f) \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) + e_n(f) =: G_n(f) + e_n(f) \end{aligned} \quad (1.9)$$

dove

$$\lambda_k = \int_a^b l_k(x) w(x) dx \quad (1.10)$$

sono detti **numeri di Christoffel**.

Il seguente teorema racchiude le proprietà di base della formula Gaussiana.

Teorema 2. *Sia $G_n(f)$ la formula Gaussiana definita in (1.9). Allora essa ha grado di precisione algebrica $2n - 1$ e i suoi coefficienti λ_k definiti in (1.10) sono sempre positivi. Inoltre, una formula se ha precisione algebrica $2n - 1$ deve necessariamente essere Gaussiana e non è possibile costruire una formula di quadratura con precisione algebrica $2n$. Quindi una formula Gaussiana è ottimale.*

Definizione 3. *Si definisce errore del polinomio di migliore approssimazione polinomiale di f la quantità*

$$E_n(f) = \inf_{P_n \in \mathbb{P}_n} \|f - P_n\|_\infty$$

dove \mathbb{P}_n è l'insieme dei polinomi algebrici di grado al più n .

Per quanto riguarda la stima dell'errore delle formule gaussiane si ha il seguente risultato

Proposizione 1. *Sia $f \in C^0([a, b])$. Allora*

$$|e_n(f)| \leq C E_{2n-1}(f),$$

dove C è una costante positiva che non dipende né da n e né da f .

Dimostrazione. Sia $P \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Allora possiamo scrivere

$$|e_n(f)| = |e_n(f - P)| \leq \int_a^b |f(x) - P(x)| w(x) dx + \sum_{k=1}^n \lambda_k(w) |f(x_k) - P(x_k)|.$$

Quindi,

$$|e_n(f)| \leq 2C \|(f - P)\|_\infty \int_a^b w(x) dx$$

da cui

$$|e_n(f)| \leq C E_{2n-1}(f).$$

□

Osserviamo che se $f \in C^{(r)}([a, b])$ con $r \geq 1$ allora

$$E_{2n-1}(f) \leq \frac{c}{n^r} \quad (1.11)$$

1.3 Prove numeriche

In questo paragrafo mostriamo tre test numerici che abbiamo effettuato per approssimare determinati integrali, mediante la formula Gaussiana, testando anche la stima teorica (1.11).

Per implementare la formula Gaussiana (1.9) abbiamo avuto la necessita di computare gli zeri x_k e i pesi λ_k . A tal fine abbiamo usato la function Matlab GAUSSQ.NEW che calcola i nodi e i pesi in $[-1, 1]$ e li abbiamo poi traslati nell'intervallo $[a, b]$. Più nel dettaglio la traslazione degli zeri è data da

$$x^{[a,b]} = a + \frac{(b-a)}{2} (x^{[-1,1]} + 1)$$

mentre quella dei pesi è

$$\begin{aligned} \lambda_k^{[-1,1]} &= \int_{-1}^1 l_k^{[-1,1]}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\ &= \int_b^a l_k^{[a,b]}(x) \frac{2^\alpha (b-x^{[a,b]})^\alpha}{(b-a)^\alpha} \frac{2^\beta (x^{[a,b]}-a)^\beta}{(b-a)^\beta} \frac{2}{(b-a)} dx^{[a,b]} \\ &= \left(\frac{2}{b-a}\right)^{\alpha+\beta+1} \int_a^b l_k^{[a,b]}(x) (b-x^{[a,b]})^\alpha (x^{[a,b]}-a)^\beta dx^{[a,b]} \\ &= \left(\frac{2}{b-a}\right)^{\alpha+\beta+1} \lambda_k^{[a,b]} \end{aligned}$$

da cui

$$\lambda_k^{[a,b]} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha+\beta+1} \lambda_k^{[-1,1]}.$$

Test 1 Consideriamo il seguente integrale

$$I_1 = \int_{-1}^1 \sin x e^x \sqrt{1-x^2} dx$$

Per approssimarlo applichiamo la formula Gaussiana con

$$v^{\alpha,\beta}(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \left(\alpha = \beta = \frac{1}{2}\right) \quad e \quad f(x) = \sin x e^x.$$

I risultati ottenuti sono riportati nella prima colonna della Tabella 1.1. Notiamo che f è analitica e quindi dalla stima (1.9) ci aspettiamo che con pochi punti dovremmo avere la precisione macchina. I risultati numerici confermano la stima teorica.

Test 2 Assumiamo di voler approssimare il seguente integrale

$$I_2 = \int_{-1}^1 \frac{|\cos x|^{\frac{7}{2}} e^{-\cos^2 x}}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

mediante la formula Gaussiana. In questo caso la funzione peso è $v^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ($\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$) e la funzione $f(x) = |\cos x|^{\frac{7}{2}} e^{-\cos^2 x} \in C^{3+\frac{1}{2}}([-1, 1])$. I risultati ottenuti sono riportati nella seconda colonna della Tabella 1.1. Osserviamo che della stima teorica con $r = 3$, per avere un errore dell'ordine di 10^{-3} dobbiamo scegliere un numero di nodi $n \geq 10$.

Test 3 Infine consideriamo il seguente integrale

$$I_3 = \int_0^1 |x|^{\frac{9}{5}} \log(2+x) dx$$

In cui la funzione peso è $v^{\alpha,\beta}(x) = 1$. I risultati ottenuti sono riportati nella terza e ultima colonna della Tabella 1.1. Notiamo che f è la meno regolare delle altre e appartiene a $C^1([0, 1])$. Quindi per avere ad esempio cinque cifre decimali esatte deve essere

$$\frac{1}{n} \leq 10^{-5} \Rightarrow n \geq 10^5.$$

I risultati numerici sono migliori delle previsioni teoriche.

Tabella 1.1: Prove Numeriche

n	I_1	I_2	I_3
2	0.392426387530127	0.675268648971025	0.358646124370636
4	0.391336003111499	0.696486208791038	0.358554451002363
8	0.391336111301250	0.695528522909636	0.358562763918586
16	—	0.695528439968352	0.358562998520751
32	—	0.695528439968351	0.358563004194061
64	—	—	0.358563004321224
128	—	—	0.358563004323961
256	—	—	0.358563004324018

Capitolo 2

Equazioni Integrali

Le **equazioni integrali** sono quelle equazioni in cui la funzione incognita compare sotto il segno di integrale. L'equazione

$$f(t) - \frac{1}{5} \int_1^3 e^{t-s} f(s) ds = 2t - 1$$

ne è un esempio. Due importanti classi di equazioni integrali sono quelle di Fredholm e quelle di Volterra.

Le equazioni integrali di Fredholm hanno gli estremi di integrazione fissati e presentano la seguente forma generica

$$p(y)f(y) - \int_a^b k(x, y)f(x)dx = g(y), \quad (2.1)$$

dove $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, f è la funzione incognita e k , g e p sono funzioni note. Le funzioni note k e g sono dette rispettivamente **nucleo** e **termine noto** dell'equazione integrale. A seconda della forma assunta dalla funzione p , le equazioni integrali di Fredholm sono suddivise come segue:

1. se $p(y) = 0$ per ogni $y \in [a, b]$, ciò implica che l'equazione (2.1) assume questa forma

$$\int_a^b k(x, y)f(x)dx = g(y),$$

allora si parla di **equazione integrale di Fredholm di prima specie**.

2. se $p(y) = \mu$ è una costante $\mu \in \mathbb{R}$ per ogni $y \in [a, b]$, cioè le equazioni presentano la forma

$$\mu f(y) - \int_a^b k(x, y)f(x)dx = g(y),$$

allora l'equazione è detta **equazione integrale di Fredholm di seconda specie**.

3. se $p(y) = 0$ in alcuni punti (ma non in tutti) dell'intervallo $[a, b]$, ovvero si ha, ad esempio,

$$(1 - y)f(y) - \int_a^b k(x, y)f(x)dx = g(y),$$

allora si parla di **equazione integrale di Fredholm di terza specie**.

Inoltre se il termine noto $g(y) = 0$, le equazioni integrali sono dette **equazioni integrali omogenee**, se $g(y) \neq 0$ sono dette **equazioni integrali non omogenee**.

Al contrario delle equazioni di Fredholm, quelle di **Volterra** possiedono un estremo di integrazione variabile. Similmente alla (2.1), si parla di equazioni integrali omogenee o non omogenee a seconda che il termine noto sia nullo oppure no.

Sono di due tipi:

- **equazioni integrali di Volterra di prima specie**

$$\int_a^y k(x, y)f(x)dx = g(y)$$

con $x \in [a, b]$ e $y \in [a, b]$.

- **equazioni integrali di Volterra di seconda specie**

$$f(y) + \int_a^y k(x, y)f(x)dx = g(y)$$

con $x \in [a, b]$ e $y \in [a, b]$.

Le equazioni integrali di Volterra di seconda specie trovano un'applicazione naturale nelle equazioni differenziali ordinarie. In questa tesi ci soffermeremo solo sulle equazioni integrali di Fredholm di seconda specie.

Le equazioni di Fredholm intervengono in molte tecniche sperimentali. Infatti in contesto sperimentale, la funzione g in (2.1) rappresenta dati misurati, ottenibili solo per un numero finito di punti $y = y_k$. Frequentemente questi punti sono pochi, e in più i dati contengono errori. Alcune volte i dati sono irripetibili, come nel caso di molti esperimenti coinvolti in test distruttivi. La funzione k usualmente rappresenta la risposta dell'attrezzatura sperimentale. Questa funzione può essere ottenuta ordinariamente attraverso esperimenti di laboratorio controllati con un'altra precisione di misura e per molti valori delle variabili (x, y) . In certi casi, è possibile conoscere la forma analitica di k . Infine, la funzione f è il segnale che bisogna determinare. Ovviamente, è normale desiderare di ottenere quante più informazioni possibili sul segnale.

Anche molti problemi della fisica matematica possono essere ricondotti ad equazioni integrali lineari in un intervallo limitato $[a, b]$. Un esempio di problema fisico che conduce ad equazioni integrali di Fredholm è quello del filo elastico di lunghezza l con estremi fissati, soggetto a una forza h per aumentare la sua lunghezza. Quando cerchiamo la densità di distribuzione della forza h sotto l'influsso della quale il filo assume una forma assegnata $f = f(x)$, otteniamo l'equazione integrale di Fredholm di prima specie

$$f(x) = \int_0^l G(x, \epsilon) h(\epsilon) d\epsilon \quad (2.2)$$

rispetto alla funzione cercata h , dove $G(x, \epsilon)$ sarà la funzione di influenza. Se supponiamo che sul filo agisca una forza variabile con il tempo t allora sotto la sua azione il filo comincia a muoversi. Con $\rho(\epsilon)$ indichiamo la densità lineare della massa del filo nel punto ϵ . All'istante t agiscono sul filo la forza $h(\epsilon)$ e la forza di inerzia, perciò l'uguaglianza (2.2) assumerà la forma seguente:

$$f(x) = w^2 \int_0^l G(x, \epsilon)\rho(\epsilon)f(\epsilon)d\epsilon + \int_0^l G(x, \epsilon)h(\epsilon)d\epsilon$$

da cui ponendo $G(x, \epsilon)\rho(\epsilon) = k(x, \epsilon)$, $w^2 = \lambda$ e $\int_0^l G(x, \epsilon)h(\epsilon)d\epsilon = g(x)$ otteniamo

$$f(x) - \lambda \int_0^l k(x, \epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = g(x),$$

ossia una equazione integrale di Fredholm di seconda specie.

2.1 Equazioni integrali di Fredholm di seconda specie

In questa sezione mi sono soffermata sulle equazioni integrali di Fredholm di seconda specie che presentano la forma

$$f(y) - \int_a^b k(x, y) v^{\alpha, \beta}(x) f(x) dx = g(y) \quad , \quad (2.3)$$

con $y \in [a, b]$, dove f è la funzione incognita, k e g sono funzioni note rispettivamente in $[a, b] \times [a, b]$ e $[a, b]$ e $v^{\alpha, \beta}$ è la funzione peso definita in (1.8). Nella pratica può capitare che le variabili x e y appartengano a due intervalli differenti, ma è possibile effettuare una trasformazione di variabile che converte il problema in uno equivalente in cui $k(x, y)$ è definito in $[a, b] \times [a, b]$. Sottolineiamo che la presenza della funzione peso implica che stiamo considerando anche il caso in cui il nucleo o la funzione f possono avere delle singolarità algebriche negli estremi dell'intervallo. In un contesto sperimentale, la funzione g sarà conosciuta solo in un numero finito di punti, $\{y_1, \dots, y_n\}$, dove n è relativamente piccolo. Tuttavia, l'importante è capire che g calcolata in y_i può contenere errori.

Più precisamente, introducendo l'operatore integrale

$$(Kf)(y) = \int_a^b k(x, y) v^{\alpha, \beta}(x) f(x) dx,$$

l'equazione (2.3) può essere scritta nella forma operatoriale

$$(I - K)f = g \quad (2.4)$$

dove I è l'operatore identità. La corrispondente equazione omogenea è data da

$$(I - K)f = 0 \quad (2.5)$$

le cui soluzioni sono chiamate **autosoluzioni**. Il nostro obiettivo è quello di trovare le condizioni necessarie e sufficienti affinché (2.3) abbia un'unica soluzione per ciascun termine noto g . A questo scopo, dobbiamo per prima cosa assumere che esista l'operatore inverso $(I - K)^{-1}$. In questo modo, l'equazione (2.3) ha un'unica soluzione data da

$$f = (I - K)^{-1}g.$$

Il seguente teorema, detto **teorema dell'alternativa di Fredholm**, fornisce le condizioni che stiamo cercando.

Teorema 3. *Sia \mathbb{X} uno spazio di Banach e K un operatore compatto. Allora esistono due alternative*

- (i) l'equazione (2.5) ha solo la soluzione banale se e solo se (2.4) ha un'unica soluzione per ciascuna funzione data g ;
- (ii) l'equazione (2.5) non ha solo la soluzione banale se e solo se, per almeno un termine noto g , (2.4) non ha soluzioni o ha più di una soluzione.

Pertanto, in virtù del Teorema 3, due soli casi sono possibili. In particolare, è il primo caso che ci è utile. Difatti, se l'operatore K è compatto, assumendo che l'equazione omogenea ammette solo la soluzione banale, la nostra equazione (2.4) possiede un'unica soluzione per ciascun termine noto g .

In questa tesi considereremo operatori integrali compatti e assumeremo $\text{Ker} \{I - K\} = \{0\}$ in modo tale da avere l'esistenza e unicità della soluzione.

Nel prossimo paragrafo descriveremo un metodo numerico che ci permette di approssimare questa soluzione.

2.2 Metodo di quadratura

I metodi di quadratura sono quei metodi che consentono di approssimare la soluzione di una equazione integrale mediante l'uso di un'opportuna formula di quadratura e la risoluzione di un sistema lineare.

Un classico metodo di quadratura è il **metodo di Nyström** che descriveremo qui di seguito. Più precisamente descriveremo il metodo di Nyström basato sulla Gaussiana (1.9). Consideriamo l'equazione integrale di Fredholm di seconda specie

$$f(y) - \int_a^b k(x, y) v^{\alpha, \beta}(x) f(x) dx = g(y)$$

approssimiamo l'integrale con la formula di quadratura Gaussiana $G_n f$ basata su n punti

$$(G_n f)(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i k(x_i, y) f(x_i)$$

dove λ_i sono i coefficienti della formula di quadratura (1.10) e gli x_i sono gli zeri del polinomio $P_n(v^{\alpha, \beta})$ ortogonale alla funzione peso $v^{\alpha, \beta}$. È noto che la formula di quadratura è stabile, ovvero

$$\sup_n \|G_n\| = \sup_n \sum_{i=1}^n |\lambda_i| < \infty$$

e che è convergente, cioè se $n \rightarrow +\infty$, allora la somma $G_n f$ converge all'integrale $\int_a^b k(x, y) v^{\alpha, \beta}(x) f(x) dx$. Quindi consideriamo l'equazione

$$f_n(y) - (G_n f_n)(y) = g(y) \quad (2.6)$$

e la calcoliamo nei punti x_j , ottenendo un sistema lineare di dimensione n

$$f_n(x_j) - \sum_{i=1}^n \lambda_i k(x_i, x_j) f_n(x_i) = g(x_j) \quad \text{per } j = 1, \dots, n, \quad (2.7)$$

che è equivalente a (2.6). Si ha infatti che ogni soluzione dell'equazione (2.6) $f_n^*(y)$, fornisce una soluzione del sistema (2.7) $f_n^* = (f_n^*(x_1), \dots, f_n^*(x_n))$. Viceversa per

ciascuna soluzione del sistema (2.7), esiste un'unica soluzione dell'equazione (2.6), che sarà data da

$$f_n^*(y) - \sum_{i=1}^n \lambda_i k(x_i, y) f_n^*(x_i) = g(y). \quad (2.8)$$

Questa è la **formula interpolatoria di Nyström**. Il seguente teorema fornisce le condizioni sotto cui l'equazione (2.6) ammette un'unica soluzione.

Teorema 4. *Sia \mathbb{X} uno spazio di Banach di funzioni continue, $K : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ un operatore compatto, $\text{Ker}\{I - K\} = \{0\}$ e indichiamo con f^* la soluzione unica dell'equazione (2.6). Se*

1. $\sup_n \|G_n\| < \infty$
2. $\|Kf - G_n f\| \rightarrow 0 \quad \forall f \in \mathbb{X}$
3. $\|(K - G_n)G_n\| \rightarrow 0$

per n sufficientemente grande, esiste l'operatore inverso $(I - G_n)^{-1}$ limitato superiormente. Sia A_n è la matrice dei coefficienti del sistema (2.7). Inoltre

$$k(A_n) \leq k(I - G_n) = \|(I - G_n)\| \|(I - G_n)^{-1}\|$$

e vale la seguente stima dell'errore

$$\|f^* - f_n^*\| \leq \|(I - G_n)^{-1}\| \|(K - G_n)f^*\|.$$

Osservazione. *Dal teorema precedente l'errore che commettiamo nell'approssimazione della soluzione dell'equazione integrale, è dato dall'errore della formula di quadratura. Pertanto se $f \in C^r([a, b])$ si ha*

$$\|f^* - f_n^*\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

2.3 Esempi numerici

In questo paragrafo mostriamo due test numerici che abbiamo effettuato per approssimare la soluzione di un'equazione di Fredholm di seconda specie, mediante la formula interpolatoria di Nyström. Per implementare la formula di Nyström (2.8) abbiamo creato una funzione Matlab NYSTRÖM. Questa richiama la funzione GAUSSQ.NEW utilizzata nel capitolo precedente per calcolare i pesi e i nodi in $[a, b]$. Successivamente computa la matrice dei coefficienti del sistema (2.7) e calcola la soluzione del sistema che utilizza nel calcolare l'interpolante di Nyström. Questa funzione NYSTRÖM restituisce non solo la soluzione approssimata dalla formula (2.8), ma anche il numero di condizionamento¹ della matrice dei coefficienti del sistema (2.7), così calcolata

$$A = I - B \quad \text{dove} \quad [B_{kj}] = \lambda_k k(x_k, x_j) \quad (2.9)$$

¹Il numero di condizionamento è definito come segue

$$k(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

- se $k(A) \approx 1$ allora A è ben condizionata,
- se $k(A) \gg 1$ allora A è mal condizionata.

Quando $k(A) \gg 1$ si ha che gli errori presenti in A o nel termine noto g dell'equazione (2.6) producono grandi variazioni nella soluzione del sistema (2.7).

Nelle Tabelle 2.1 e 2.2 sono presenti i risultati dei test effettuati insieme al numero di condizionamento della matrice (2.9). Con il numero di condizionamento della matrice (2.9) ci rendiamo conto di quanto un errore sui dati possa essere amplificato nei risultati. Se l'errore domina sulla soluzione, ciò che troviamo è lontano dalla realtà. Per questo motivo è importante tener presente il numero di condizionamento della matrice dei coefficienti del sistema (2.7).

Test 1 Consideriamo la seguente equazione

$$f(y) - \int_{-1}^1 \frac{\cos(x+y)f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = y + 2.$$

Per approssimare la sua soluzione, che non è nota analiticamente, applichiamo il metodo di Nyström con

$$k(x, y) = \cos(x+y), \quad g(y) = y + 2, \quad v^{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

I risultati ottenuti sono riportati nella Tabella 2.1. La soluzione dell'equazione è stata valutata in due punti diversi dell'intervallo $[-1, 1]$. Le funzioni k e g sono analitiche e dal Teorema 4 ci aspettiamo di raggiungere la precisione macchina con pochi punti. I risultati numerici confermano le nostre aspettative teoriche. Notiamo che il $k(A)$ presente nell'ultima colonna della tabella si stabilizza e non cresce con l'aumentare dei nodi.

Test 2 Applichiamo il metodo di Nyström all'equazione

$$f(y) - \int_{-1}^1 e^{(x+y)} f(x) \sqrt{1-x^2} dx = |y|^{\frac{9}{2}}.$$

cioè un'equazione in cui

$$k(x, y) = e^{x+y}, \quad g(y) = |y|^{\frac{9}{2}}, \quad v^{\alpha, \beta}(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

I risultati ottenuti sono riportati nella Tabella 2.2. La soluzione dell'equazione è stata valutata in due punti diversi dell'intervallo $[-1, 1]$. In questo test abbiamo che k è analitica e $g \in C^{4+\frac{1}{2}}([-1, 1])$. Per il Teorema 4, a causa dell'andamento di g , ci aspettiamo una convergenza più lenta rispetto al caso precedente. Nella Tabella 2.2 possiamo notare questo andamento e la nostra previsione teorica è confermata dai risultati numerici ottenuti. Possiamo notare inoltre nell'ultima colonna della Tabella 2.2 che la matrice del sistema risolto è ben condizionato.

Tabella 2.1: Risultati numerici per Test 1

n	$f^*(0.3)$	$f^*(0.5)$	$k(A)$
8	-2.86320986201297	-2.37253434508721	2.40558273255800
16	-2.86320986201221	-2.37253434508652	2.40558273255747
32	-2.86320986201222	-2.37253434508653	2.40558273255748
64	—	—	2.40558273255748
128	—	—	2.40558273255748
256	—	—	2.40558273255748

Tabella 2.2: Risultati numerici per Test 2

n	$f^*(0.3)$	$f^*(0.5)$	$k(A)$
8	-0.203748472986358	-0.210083590776093	4.09057894886287
16	-0.203730329502658	-0.210061430275058	4.79597492065687
32	-0.203729829615555	-0.210060819711572	5.17644957702433
64	-0.203729816946711	-0.210060804237812	5.37457190551735
128	-0.203729816644326	-0.210060803868478	5.47573067763750
256	-0.203729816637364	-0.210060803859974	5.52685094146109

Bibliografia

- [1] Rodriguez, G., *Algoritmi numerici*, Pitagora Editrice Bologna, 2008.
- [2] Fermo, L., *Applicable approximation theory*, dispense del 2016.
- [3] Pantieri L., Gordini T., *L'arte di scrivere con L^AT_EX*, 2018.
- [4] Michail L. krasnov Aleksandr I. Kiselev, Grigorij I. Makarenko, *Equazioni integrali*, Edizioni mir, 1983.
- [5] Rainer Kress, *Linear Integral Equations*, 2nd ed.,1999 Springer-Verlag New York Inc, 1989.
- [6] Milton Wing G. with the assistance of John D. Zahrt, *A primer on integral equations of the first kind, The problem of deconvolution and unfolding*, Los Alamos NM, 1991.
- [7] Kendall E. Atkinson, *The numerical solution of Integral equations of second kind*, Cambridge university press, 1997.