

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI CAGLIARI
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRICA ED ELETTRONICA

INTERPOLAZIONE E APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONI

TESINA DEL CORSO DI CALCOLO NUMERICO 2

AA 2010/2011

Studente
Carlo Sau (40728)

Referente
prof. Giuseppe Rodriguez

Sommario

1	Interpolazione di funzioni.....	3
1.1	Base del polinomio	4
1.1.1	Rappresentazione in base canonica.....	4
1.1.2	Rappresentazione in forma di Lagrange	5
1.1.3	Rappresentazione in base delle potenze traslate.....	6
1.1.4	Valutazione del condizionamento delle basi introdotte	8
1.2	Distribuzione dei nodi di interpolazione	12
1.2.1	Distribuzione dei nodi di Chebychev.....	12
1.2.2	Valutazione delle diverse distribuzioni dei nodi	13
1.3	Funzioni spline.....	18
1.3.1	Valutazione delle spline: distribuzione dei nodi	19
1.3.2	Valutazione delle spline: funzioni interpolate	20
1.3.3	Valutazione delle spline: numero dei nodi	23
2	Approssimazione di funzioni	29
2.1	Approssimazione nel senso dei minimi quadrati	29
2.2	Valutazione del polinomio di migliore approssimazione	30
2.2.1	Il numero dei nodi e il grado del polinomio.....	31
3	Conclusioni.....	38

1 Interpolazione di funzioni

L'interpolazione è una tecnica di approssimazione di funzioni che a partire da una funzione $y = f(x)$ di cui è noto un numero discreto e limitato di punti ne calcola una approssimazione che passa precisamente per tali punti noti. Questo potrebbe equivalere al caso in cui si acquisisca un segnale reale, lo si campioni per consentirne la conversione in un segnale numerico e si voglia risalire ad una rappresentazione del segnale di partenza dai valori noti. In particolare disponendo di $n + 1$ punti, rappresentati dalle coppie di numeri reali

$$(x_i, y_i), \quad i = 0, \dots, n,$$

un'interpolazione $\phi(x)$ della funzione sarà anch'essa una funzione, tale per cui:

$$\phi(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Tipicamente nella pratica tale operazione è implementata approssimando la funzione $f(x)$, che appartiene ad uno spazio a dimensione infinita, con una combinazione lineare $\phi(x)$ di un sottospazio a dimensione finita $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$, dove le generiche φ_j devono essere funzioni facili da trattare, linearmente indipendenti e in grado di approssimare la funzione $f(x)$; in altri termini la funzione interpolante $\phi(x)$ è una combinazione lineare delle funzioni φ_j

$$\phi(x) = \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x),$$

dove i coefficienti a_j si ricavano imponendo le condizioni di interpolazione

$$\phi(x_i) = \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

La soluzione del sistema di equazioni che si ottiene dalle condizioni di interpolazione, e dunque la funzione interpolante, esiste ed è unica se e solo se il determinante della matrice Φ (determinante di Haar) è non nullo; tale matrice costituisce la matrice dei coefficienti del sistema ottenuto, ed è definita da

$$\Phi_{ij} = \varphi_j(x_i), \quad i, j = 0, \dots, n.$$

Se tale matrice ha determinante non nullo si dice che l'insieme di funzioni $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ verifica la condizione di unisolvenza e il sistema in questione prende il nome di sistema di Chebychev.

Una delle scelte più comuni per la tipologia della base di funzioni che, combinate linearmente, riescono ad interpolare dei punti noti è quella polinomiale; tale scelta è spinta per lo più dalla facilità di trattazione di questo tipo di funzioni e dalla nota tendenza ad approssimare bene le funzioni del polinomio di Taylor (serie di Taylor troncata).

Vi sono oltretutto alcune importanti teoremi dimostrati per l'approssimazione di funzioni mediante polinomi. Infatti è dimostrato che il polinomio di grado n che meglio approssima una funzione f rispetto alla norma- ∞ la interpola su $n + 1$ punti, ma la distribuzione dei punti stessi risulta molto ardua da determinare. Inoltre è anche noto che se $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$, allora il polinomio interpolante esiste ed è unico, ovvero il sistema risultante è un sistema di Chebychev.

1.1 Base del polinomio

Una delle conseguenze dirette dell'esistenza e unicità del polinomio interpolante è che esso sia esprimibile secondo diverse rappresentazioni a seconda di come si sceglie la base di funzioni che, combinate linearmente attraverso appositi coefficienti, costituiscono il polinomio stesso. Tuttavia la scelta della rappresentazione spesso influisce oltre che sul carico computazionale nel calcolo del polinomio, anche sul condizionamento del problema e sulla stabilità dell'algoritmo di calcolo derivante, come si vedrà nel seguito della sezione.

1.1.1 Rappresentazione in base canonica

La più comune tra le basi è quella canonica, data dalle funzioni linearmente indipendenti $1, x, x^2, \dots, x^n$. Un polinomio generico $p_n(x)$ di ordine n espresso in tale base ha la forma

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j.$$

Le condizioni di interpolazione per un polinomio espresso in base canonica sono

$$\sum_{j=0}^n a_j x_i^j = y_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

e la matrice dei coefficienti \mathbf{X} del sistema così ottenuto (matrice di Vandermonde) sarà

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix},$$

il cui determinante vale

$$\det(\mathbf{X}) = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i>j}}^n (x_i - x_j).$$

Come ci si può aspettare questo determinante risulta non nullo, ovvero esiste ed è unica la funzione interpolante in tale sottospazio di funzioni (base canonica), se viene rispettata la condizione di esistenza e unicità del polinomio (se $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$).

La base canonica tuttavia presenta dei problemi in quanto a condizionamento della matrice \mathbf{X} in caso di nodi vicini, in quanto a costo computazionale elevato ($O(n^3)$) rispetto ad altri algoritmi e in quanto a stabilità della base che amplifica sul risultato piccoli errori sui coefficienti.

1.1.2 Rappresentazione in forma di Lagrange

Una rappresentazione alternativa alla base canonica per il polinomio interpolante è costituita dalla forma di Lagrange. Tale rappresentazione ha in sostanza un approccio opposto alla rappresentazione in base canonica: nella forma di Lagrange il maggior onere computazionale risiede nel calcolo della base, mentre i coefficienti della rappresentazione sono immediati e coincidono con le ordinate dei nodi a disposizione; nella rappresentazione in base canonica invece il calcolo della base è piuttosto semplice ma risalire ai coefficienti è abbastanza complicato e richiede un ingente sforzo computazionale.

La base della rappresentazione in forma di Lagrange è costituita dai polinomi caratteristici di Lagrange $\{L_j(x)\}_{j=0}^n$, polinomi tutti di grado n , se è rispettata la condizione di esistenza e unicità del polinomio ($x_i \neq x_j$ per $i \neq j$). I polinomi caratteristici di Lagrange sono definiti da

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Spesso è utile un'espressione alternativa di tali polinomi, che ha la forma

$$L_j(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)\omega'_n(x_j)},$$

con

$$\omega_n(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k) \in \Pi_{n+1}.$$

Per tali polinomi vale la proprietà

$$L_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

da cui consegue che la matrice Φ corrispondente a tale rappresentazione non è altro che la matrice identità, il cui determinante è notoriamente non nullo; tali polinomi sono dunque un sistema di Chebychev e possono essere impiegati in luogo della base canonica per la rappresentazione di un polinomio interpolante.

Il polinomio interpolante rappresentato in forma di Lagrange, prende il nome di polinomio interpolante di Lagrange, ed è definito da

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j L_j(x).$$

La complessità computazionale richiesta dal calcolo del polinomio interpolante di Lagrange e dalla sua valutazione in un punto è pari a $O(n^2)$, mentre quella richiesta per le stesse operazioni dal calcolo del polinomio interpolante mediante rappresentazione in base canonica è di $O(n^3)$ per il calcolo del polinomio e di $O(n)$ per ogni sua valutazione; la stabilità dell'algoritmo di calcolo del polinomio interpolante di Lagrange può anch'essa essere compromessa se alcuni nodi disponibili sono molto vicini tra loro.

1.1.3 Rappresentazione in base delle potenze traslate

Una base di funzioni ulteriore utilizzata è quella delle potenze traslate, già introdotta parzialmente per altri scopi nella rappresentazione in forma di Lagrange; mentre le rappresentazioni precedenti costituiscono gli estremi tra il concentrare l'onere computazionale sul calcolo della base o su quello dei coefficienti, questa rappresentazione si pone in una situazione intermedia. La base delle potenze traslate è definita dalle funzioni $\{1\} \cup \{\omega_j\}_{j=0}^{n-1}$, definite da

$$\omega_j(x) = \prod_{k=0}^j (x - x_k) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_j),$$

ognuna delle quali ha ordine $j + 1$.

I coefficienti di tale rappresentazione sono invece calcolati tramite una formula ricorsiva secondo quelle che vengono chiamate le differenze divise; il generico coefficiente a_j sarà uguale alla differenza divisa di ordine $j + 1$

$$a_j = f[x_0, x_1, \dots, x_j] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_j] - f[x_0, x_1, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_0},$$

con

$$f[x_i] = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

La rappresentazione del polinomio interpolante così ottenuto, che prende il nome di polinomio interpolante di Newton, si può scrivere nella forma

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j \omega_{j-1}(x),$$

dove a_j e $\omega_j(x)$ sono stati definiti in precedenza, e si pone

$$\omega_{-1}(x) = 1.$$

L'algoritmo che permette il calcolo del polinomio interpolante in questa forma è di tipo ricorsivo, visto che i coefficienti a_j vanno calcolati secondo la formula delle differenze divise; in sostanza, infatti, tale rappresentazione nasce dall'idea di creare il polinomio interpolante in maniera ricorsiva: si suppone di aver già calcolato il polinomio $p_{n-1}(x)$ che interpola i nodi di ascissa $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ e di volere aggiungere un nuovo nodo (x_n, y_n) sfruttando il polinomio già ottenuto, in modo che il nuovo polinomio $p_n(x)$ interpolerà i punti $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ e avrà la forma

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + g_n(x),$$

con $g_n(x)$ funzione opportuna. La funzione in questione deve essere tale per cui il nuovo polinomio $p_n(x)$ interpoli gli stessi punti del vecchio $p_{n-1}(x)$; per tale motivo occorre che sia di grado n e oltretutto valga

$$g_n(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

ovvero $g_n(x)$ deve avere la forma

$$g_n(x) = a_n \cdot \omega_{n-1}(x),$$

con $\omega_{n-1}(x)$ generica funzione della base delle potenze traslate, come definita in precedenza; in secondo luogo il nuovo polinomio $p_n(x)$ deve anche interpolare il nodo aggiuntivo (x_n, y_n) e dunque, imponendo la condizione di interpolazione di tale nodo, si ha

$$a_n = \frac{y_n - p_{n-1}(x_n)}{\omega_{n-1}(x_n)}.$$

E' intuitivo notare che con tale risultato, applicando ricorsivamente il procedimento a partire dal polinomio $p_0(x) = y_0$, è possibile costruire il polinomio interpolante $p_n(x)$ aggiungendo ad ogni iterazione un nuovo nodo. Tuttavia l'algoritmo che viene comunemente usato per il calcolo del polinomio interpolante di Newton è quello che sfrutta l'espressione dei coefficienti a_j tramite differenze divise, in quanto risulta più stabile e meno complesso dell'algoritmo che calcola tali coefficienti nella maniera appena mostrata.

L'algoritmo per il calcolo del polinomio interpolante di Newton ha una complessità computazionale pari a $O(n^2)$ per il calcolo dei coefficienti della rappresentazione, e di $O(n)$ per ciascuna valutazione effettuata. Anche in tal caso tuttavia in caso di nodi vicini tra loro si hanno problemi di stabilità. Un vantaggio della rappresentazione del polinomio interpolante mediante la base delle potenze traslate è la possibilità di aggiungere un nuovo nodo senza la necessità di ricalcolare l'intero polinomio, come invece accade per le altre rappresentazioni introdotte.

1.1.4 Valutazione del condizionamento delle basi introdotte

Si vuole ora valutare il condizionamento derivante dalla scelta della base, tra quelle presentate nella sezione; per fare ciò si applicheranno appositamente delle perturbazioni agli algoritmi che calcolano il polinomio interpolante secondo le varie rappresentazioni. In particolare si perturberanno i coefficienti del polinomio e se ne osserverà il condizionamento, ovvero il corrispondente errore sui risultati, derivante dalla scelta della base associata ai coefficienti della specifica rappresentazione. L'errore in questione è quello di interpolazione, parametro di valutazione dell'errore dovuto all'approssimazione della funzione di partenza con un'altra, in questo caso un polinomio; tale errore è definito come

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x).$$

Ad ogni test svolto questa quantità si è valutata per un certo numero di ascisse di valutazione della funzione, 201 per la precisione, distribuite in maniera equispaziata nell'intervallo di interpolazione; per ogni funzione si è valutata media (MEAN), deviazione standard (STD) e valore massimo in valore assoluto (MAX) dei 201 errori di interpolazione calcolati nei vari punti di valutazione. Dalla valutazione sono stati esclusi eventuali valori NaN derivanti dall'elaborazione dei dati.

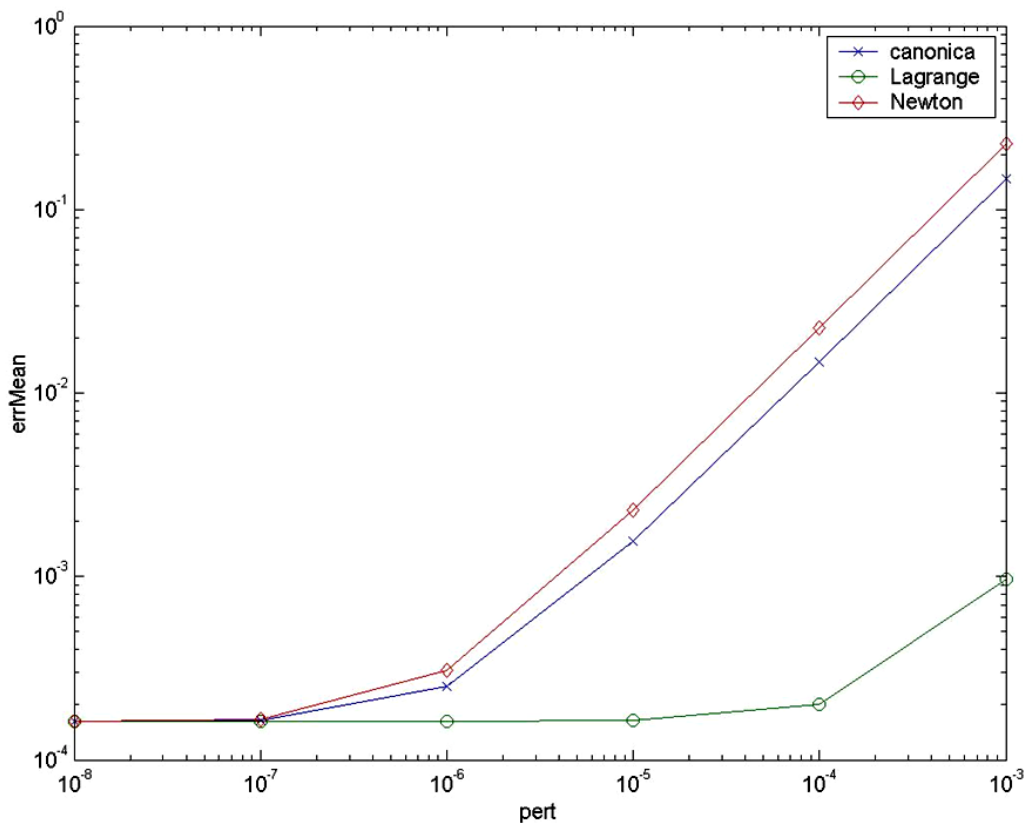
Degli errori con distribuzione statistica di tipo gaussiano a media nulla, deviazione standard e varianza unitaria sono stati sommati ai coefficienti dei polinomi calcolati dai vari algoritmi; l'ordine di grandezza dell'errore introdotto è stato impostato e la perturbazione è stata definita univocamente per tutti e tre gli algoritmi testati. In questa maniera è stato possibile osservare e confrontare l'andamento del condizionamento dovuto alla rappresentazione del polinomio interpolante nelle diverse

basi senza introdurre diversificazione nella valutazione. Il test si è svolto per varie funzioni da interpolare e i risultati più significativi sono riportati di seguito.

- $\sin x/x$ (estremi interpolazione $[-\pi, \pi]$, grado polinomio 6, numero nodi 7)

1.1 Errori in relazione alla perturbazione applicata ai coefficienti del polinomio

PERT	BASE CANONICA			LAGRANGE			NEWTON		
	MEAN	MAX	STD	MEAN	MAX	STD	MEAN	MAX	STD
E-8	2E-4	3E-4	1E-4	1,621E-4	3E-4	9,56E-5	2E-4	3E-4	1E-4
E-7	2E-4	3E-4	1E-4	1,621E-4	3E-4	9,56E-5	2E-4	3E-4	1E-4
E-6	3E-4	1,4E-3	3E-4	1,623E-4	3E-4	9,58E-5	3E-4	1,1E-3	3E-4
E-5	1,6E-3	1,4E-2	2,7E-3	1,641E-4	3E-4	9,81E-5	2,3E-3	9,6E-3	3,3E-3
E-4	1,47E-2	1,401E-1	2,75E-2	1,998E-4	4E-4	1,264E-4	2,27E-2	9,49E-2	3,33E-2
E-3	1,466E-1	1,4005E+0	2,759E-1	9,633E-4	1,8E-3	4,54E-4	2,281E-1	9,476E-1	3,319E-1

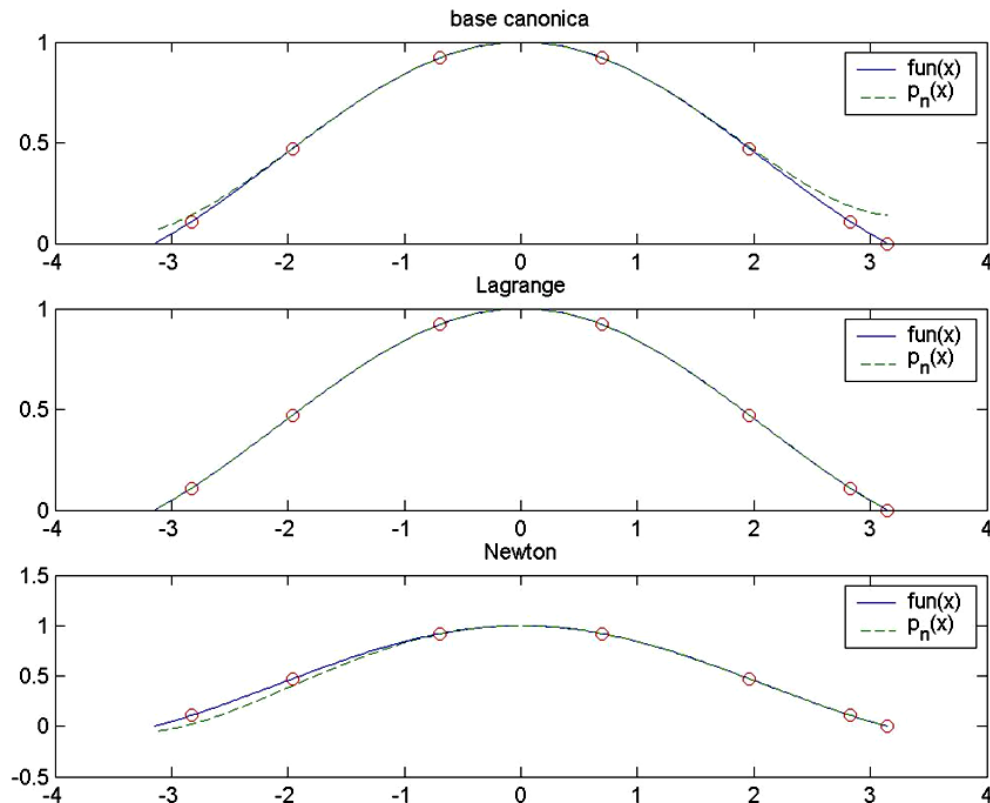


1.1 Andamento dell'errore medio di interpolazione in funzione della perturbazione applicata ai coefficienti

Dalla figura 1.1 può notare come la rappresentazione in forma di Lagrange in tal caso è molto meglio condizionata delle altre due; infatti l'errore medio commesso dal corrispondente algoritmo inizia a risentire della perturbazione sui coefficienti solo quando questa comincia a farsi particolarmente significativa. La rappresentazione in base canonica e nella base delle potenze traslate (di Newton) invece risentono molto della perturbazione anche per piccole variazioni dei coefficienti del polinomio interpolante; in questo specifico caso inoltre il polinomio di Newton risponde anche in

maniera peggiore del polinomio in base canonica, almeno per quanto riguarda l'errore medio; per quanto riguarda l'errore massimo, qua non riportato, l'andamento è simile ma è la base canonica ad avere i picchi massimi d'errore più elevati di quelli della rappresentazione con Newton.

In figura 1.2 è riportato l'andamento del polinomio interpolante rispetto alla funzione interpolata per le tre basi analizzate con errore sui coefficienti dell'ordine di 10^{-4} . Si nota chiaramente che la rappresentazione di Lagrange risulta la migliore.

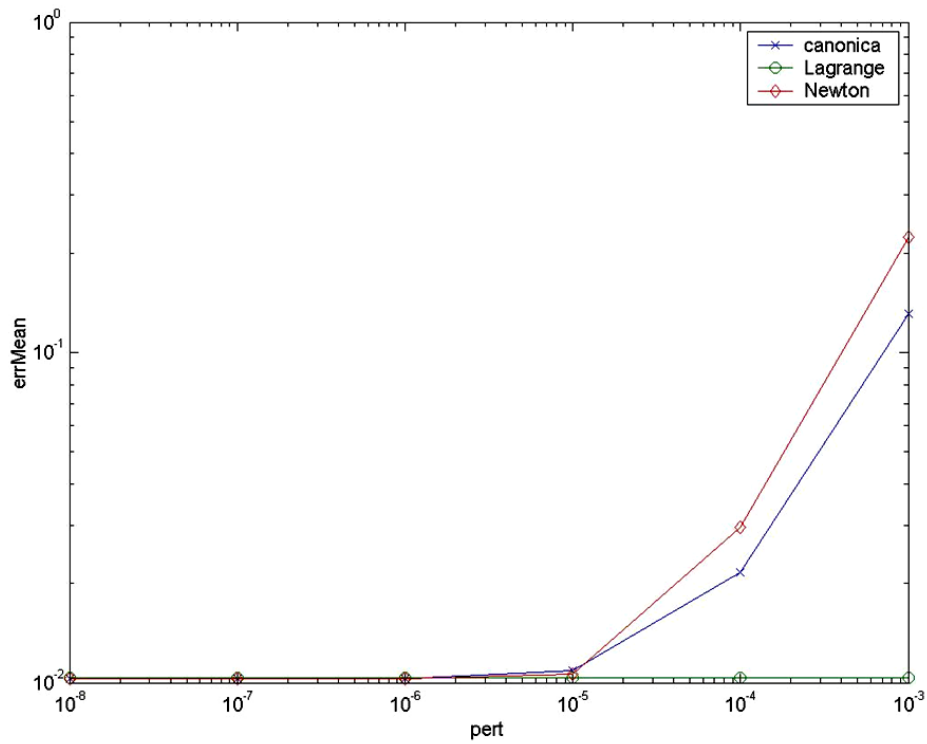


1.2 Funzione interpolata e polinomio interpolante nelle tre rappresentazioni

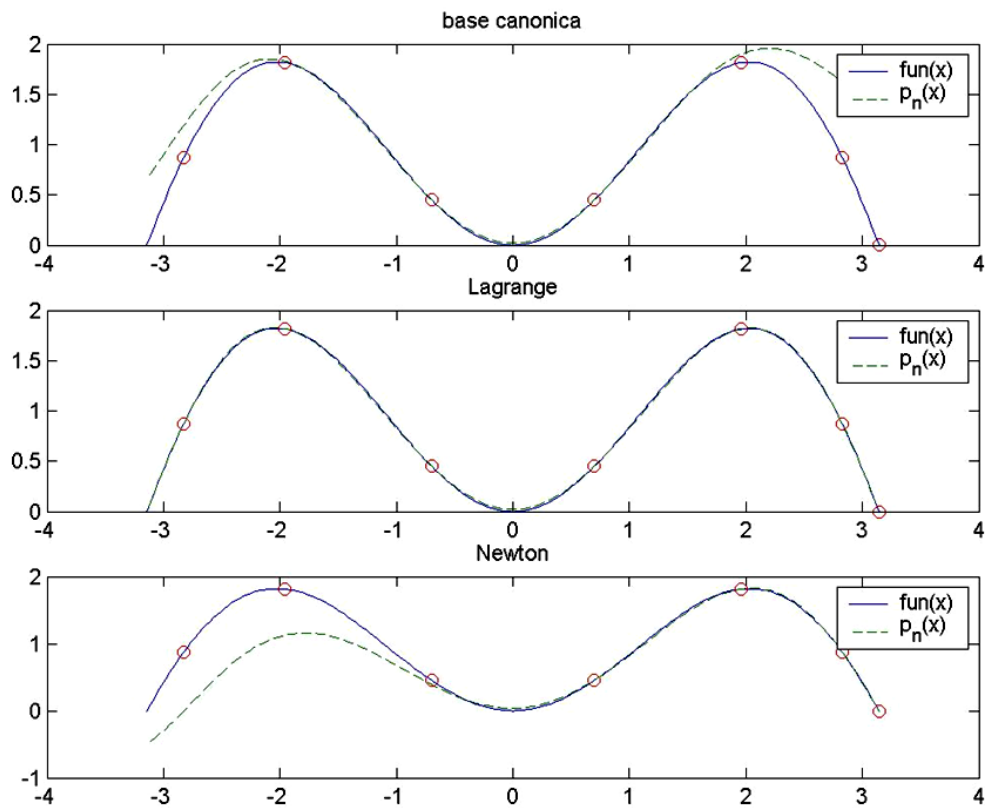
- $x \cdot \sin x$ (estremi interpolazione $[-\pi, \pi]$, grado polinomio 6, numero nodi 7)

1.2 Errori in relazione alla perturbazione applicata ai coefficienti del polinomio

PERT	BASE CANONICA			LAGRANGE			NEWTON		
	MEAN	MAX	STD	MEAN	MAX	STD	MEAN	MAX	STD
E-8	1,03E-2	2,15E-2	6,2E-3	1,04E-2	2,15E-2	6,2E-3	1,03E-2	2,15E-2	6,2E-3
E-7	1,03E-2	2,15E-2	6,2E-3	1,04E-2	2,15E-2	6,2E-3	1,03E-2	2,15E-2	6,2E-3
E-6	1,03E-2	2,15E-2	6,2E-3	1,04E-2	2,15E-2	6,2E-3	1,03E-2	2,15E-2	6,2E-3
E-5	1,11E-2	2,15E-2	6E-3	1,03E-2	2,15E-2	6,2E-3	1,07E-2	2,2E-2	6,8E-3
E-4	2,36E-2	1,401E-1	2,43E-2	1,03E-2	2,14E-2	6,2E-3	3,06E-2	8,82E-2	2,84E-2
E-3	1,527E-1	1,4005E+0	2,726E-1	1,02E-2	2,06E-2	6E-3	2,345E-1	9,379E-1	3,261E-1



1.3 Andamento dell'errore medio di interpolazione in funzione della perturbazione applicata ai coefficienti



1.4 Funzione interpolata e polinomio interpolante nelle tre rappresentazioni

Dalla figura 1.3 si nota anche in tal caso come le due rappresentazioni in base canonica e di Newton siano peggio condizionate di quella di Lagrange; tuttavia stavolta l'effetto della perturbazione si fa sentire per valori degli errori sui coefficienti maggiori. Ancora una volta il calcolo del polinomio di Newton risente maggiormente della perturbazione del calcolo del polinomio in base canonica e il dato è confermato anche dall'andamento dell'errore massimo di interpolazione, qua non riportato. Come per il caso precedente si riporta in figura 1.4 la funzione interpolante con il polinomio interpolante nelle varie rappresentazioni.

1.2 Distribuzione dei nodi di interpolazione

Uno dei parametri di fondamentale importanza nell'interpolazione polinomiale è la distribuzione dei nodi; infatti questa influisce pesantemente sull'errore di interpolazione, e per certe distribuzioni si riscontra addirittura il tendere all'infinito dell'errore all'aumentare del grado del polinomio.

Ci sono tuttavia due teoremi che è doveroso citare riguardo la correlazione tra distribuzione dei nodi ed errore di interpolazione. Il primo teorema (Faber) dice che per ogni distribuzione di nodi vi è almeno una funzione $f \in C[a, b]$ tale che l'errore di interpolazione non converga a zero per n che tende all'infinito. Il secondo invece dice che per ogni funzione continua esiste almeno una distribuzione dei nodi tale che l'errore di interpolazione converga a zero per n che tende all'infinito. In sostanza dunque non esiste una scelta dei nodi ottimale per qualunque tipo di funzione da interpolare, ma sicuramente per una data funzione la scelta ottimale esiste; è opportuno dunque trovare di caso in caso una distribuzione ottimale dei nodi.

La distribuzione dei nodi più semplice ed intuitiva è sicuramente quella dei nodi equispaziati nell'intervallo di interpolazione della funzione; purtroppo tale scelta nella gran parte dei casi non risulta essere quella ottimale. Esiste tuttavia una scelta della distribuzione dei nodi che fa tendere l'errore di interpolazione a zero col crescere di n per una vasta gamma di funzioni da interpolare: i nodi di tale distribuzione sono chiamati nodi di Chebychev.

1.2.1 Distribuzione dei nodi di Chebychev

La distribuzione dei nodi di Chebychev risulta ottimale, nel senso che fa convergere a zero l'errore di interpolazione per n che tende all'infinito, per una vasta tipologia di funzioni; queste funzioni sono tutte le funzioni f tali che $f \in C^1[a, b]$, ovvero tutte le funzioni continue con derivata prima continua. Se si dispone di $n + 1$ nodi di ascisse $\{x_i\}_{i=0}^n$ e tali ascisse sono gli zeri del polinomio di Chebychev di grado $n + 1$, allora l'errore di interpolazione converge a zero per n che tende all'infinito (teorema di Bernstein); i nodi così trovati sono chiamati nodi di Chebychev.

Il polinomio di Chebychev è esprimibile in varie rappresentazioni; per i nostri scopi, scelto un intervallo di riferimento $[-1,1]$, il polinomio di Chebychev di grado $n + 1$ si può esprimere come

$$T_{n+1} = \cos((n + 1)\theta),$$

con $x = \cos \theta$ e $\theta \in [0, \pi]$, in quanto tale rappresentazione rende particolarmente agevole il calcolo degli zeri; infatti imponendo che

$$\cos((n + 1)\theta) = 0,$$

si trova che

$$x_k = \cos\left(\frac{2k + 1}{2n + 2}\pi\right), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Per riportare poi i nodi in un generico intervallo $[a, b]$ da quello di riferimento adottato $[-1,1]$, occorre applicare la trasformazione

$$t_k = \frac{b - a}{2}x_k + \frac{a + b}{2}$$

1.2.2 Valutazione delle diverse distribuzioni dei nodi

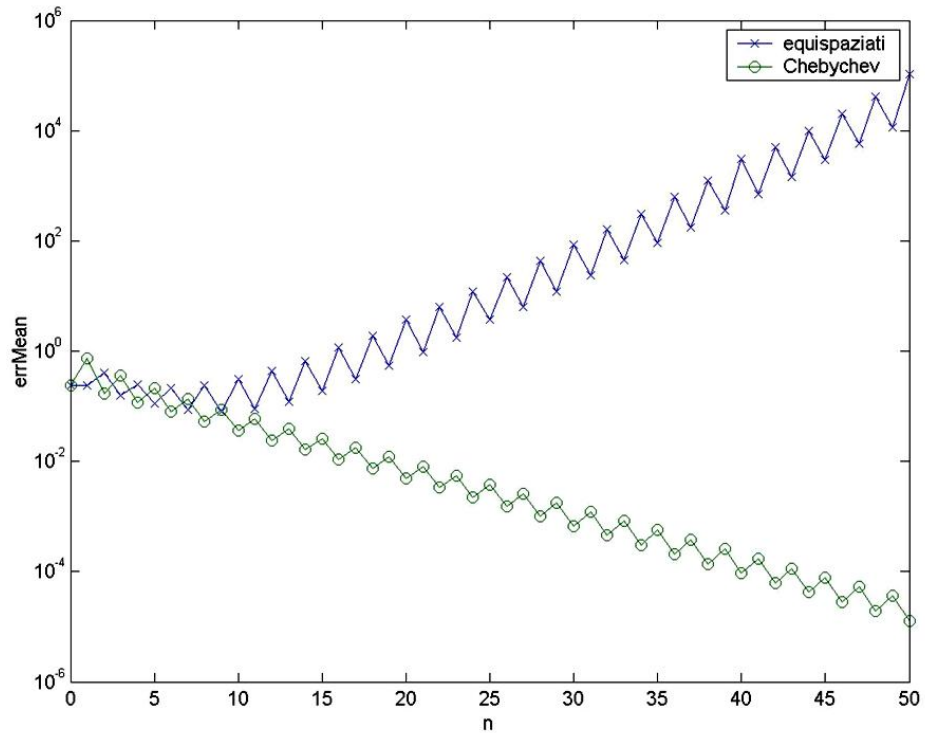
Si vuole ora valutare la scelta delle diverse distribuzioni dei nodi al variare della funzione f da interpolare e del numero $n + 1$ dei nodi disponibili, con particolare attenzione all'andamento dell'errore di interpolazione per n sempre maggiori tendenti all'infinito. L'errore di interpolazione è stato definito nella sezione 1.1.4 e anche in tal caso si è valutata media, la deviazione standard e il valore massimo in valore assoluto dell'errore di interpolazione nei 201 punti di valutazione considerati; allo stesso modo dell'analisi precedente sono stati esclusi eventuali valori NaN derivanti dal calcolo.

Di seguito sono riportati i risultati più significativi delle prove svolte; come algoritmo di calcolo del polinomio interpolante è stato utilizzato quello per il calcolo del polinomio interpolante di Lagrange, scelta motivata da ragioni di tempo di elaborazione e complessità computazionale inferiori. La scelta del grado del polinomio interpolante è sempre fissata dal numero di nodi $n + 1$ disponibili, essendo pari a n .

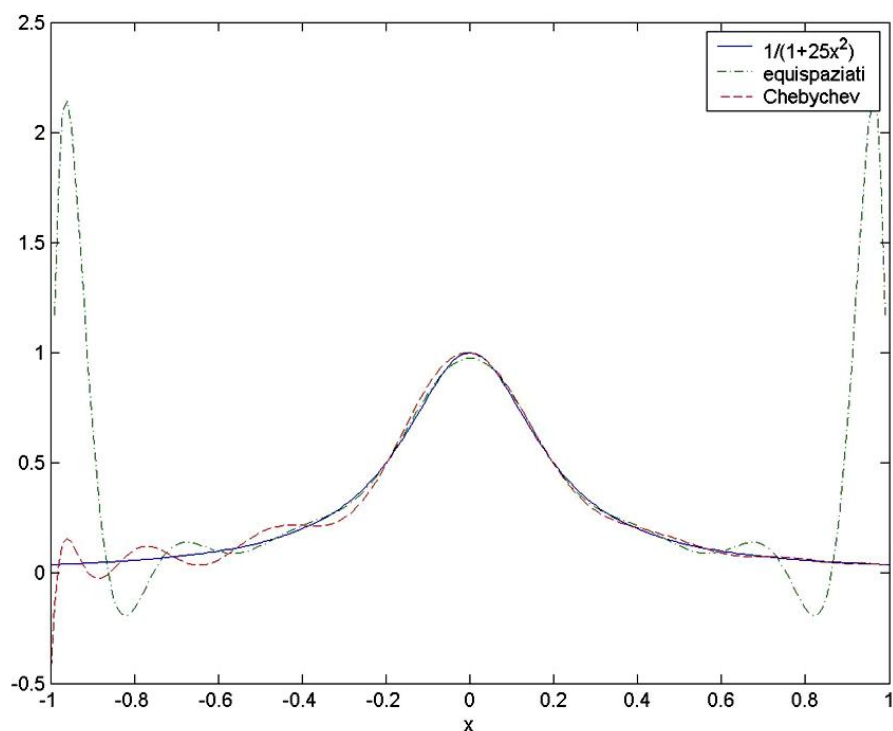
- $\frac{1}{(1+25x^2)}$ (estremi interpolazione $[-1,1]$)

La prima funzione analizzata è quella che viene chiamata funzione di Runge, nota per la sua tendenze ad essere difficile da interpolare; questa funzione è infinitamente differenziabile e dunque appartiene alla categoria di funzioni per cui i nodi di Chebychev costituiscono una scelta ottimale per la distribuzione dei nodi stessi.

Dunque l'errore che deriva dalla scelta di nodi di Chebychev per l'interpolazione darà un errore che ci si aspetta converga a zero al crescere del numero di nodi; l'errore derivante dalla scelta di nodi equispaziati invece in tal caso tenderà all'infinito in quanto questo è uno dei numerosi casi per cui tale scelta non è vantaggiosa.



1.5 Andamento dell'errore medio di interpolazione in funzione del numero dei nodi per le due distribuzioni



1.6 Polinomi interpolanti di ordine 15 della funzione di Runge per le due diverse distribuzioni dei nodi

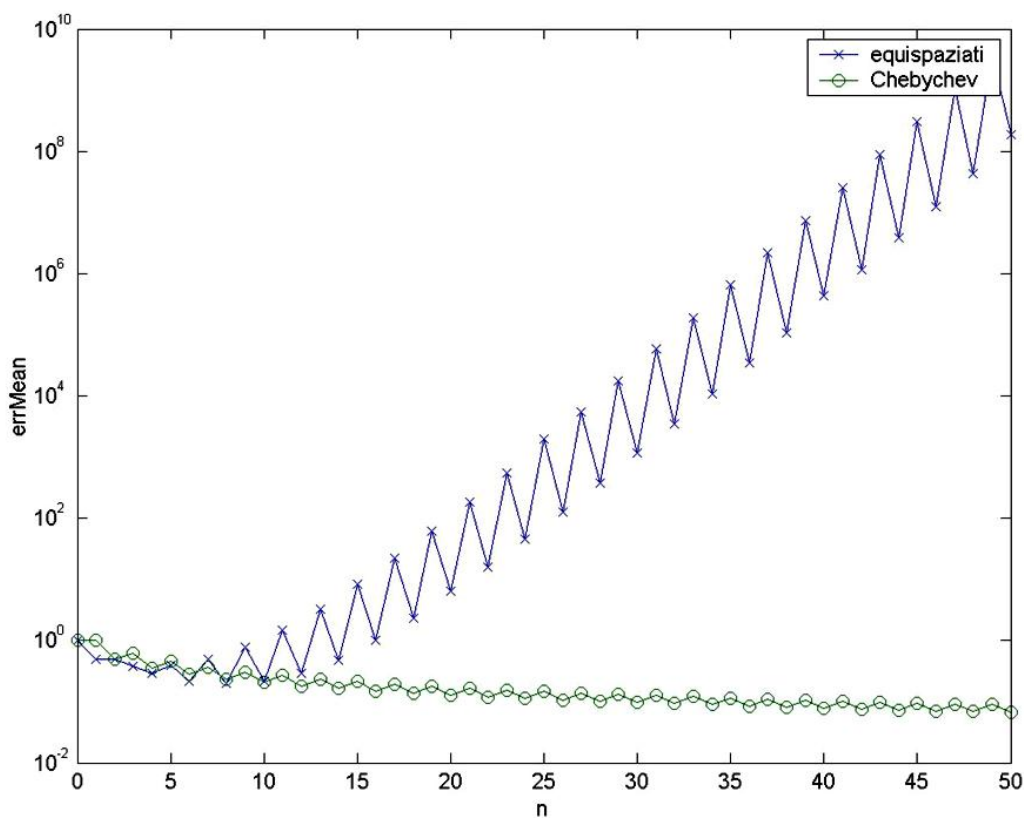
Quanto detto è confermato dalla figura 1.5 dove si nota chiaramente che l'andamento dell'errore di interpolazione medio nel caso di nodi equispaziati ha un andamento crescente al crescere dei nodi mentre quello nel caso di nodi di Chebychev converge al verso valori sempre più prossimi allo zero.

- ***sign(x)*** (estremi interpolazione $[-1,1]$)

La funzione segno è una funzione che non appartiene a quella gamma di funzioni per cui la scelta della distribuzione dei nodi di Chebychev si dimostra ottimale, secondo il teorema visto in precedenza; la funzione segno adottata, presente in Matlab, è definita come

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

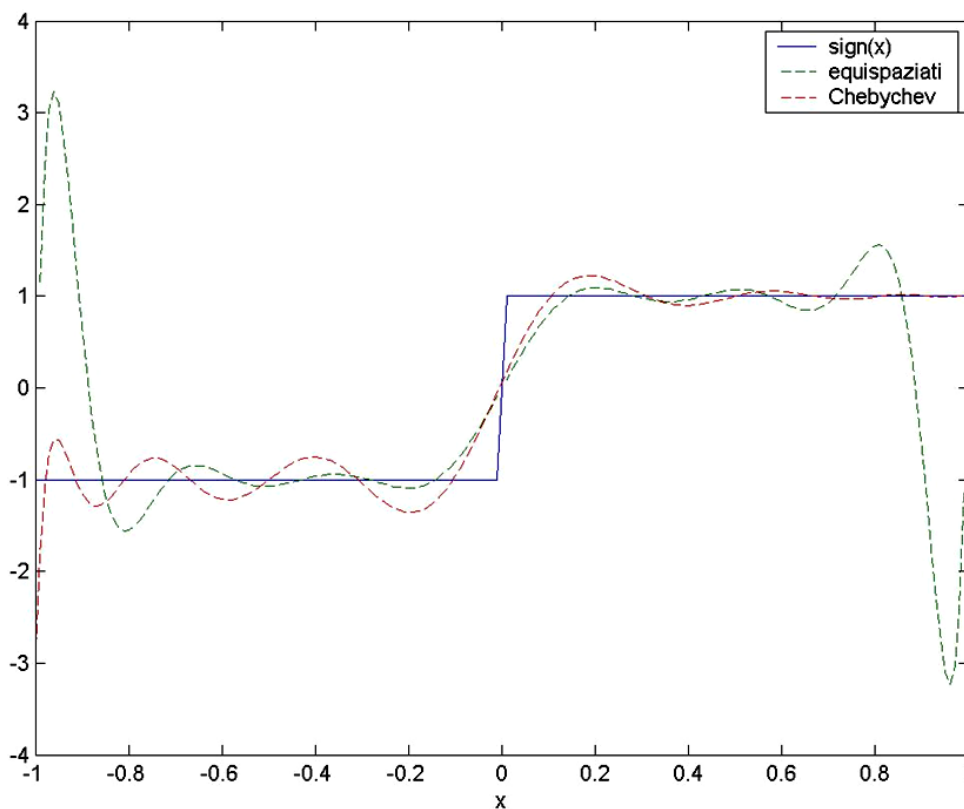
Tale funzione presenta dunque una discontinuità nella derivata prima nel punto di ascissa $x = 0$; dunque la scelta dei nodi di Chebychev può risultare non ottimale o comunque può presentare un comportamento dell'errore non decrescente al crescere del numero dei nodi presi in considerazione. L'andamento dell'errore medio per le due distribuzioni è riportato in figura 1.7.



1.7 Andamento dell'errore medio di interpolazione in funzione del numero dei nodi per le due distribuzioni

Dal grafico si nota chiaramente che anche in tal caso la scelta dei nodi di Chebychev risulta essere migliore di quella di nodi equispaziati per numero di nodi crescenti; ciò nonostante la funzione interpolata non faccia parte del gruppo di funzioni per cui la scelta di Chebychev è sicuramente una scelta ottima. Si può notare inoltre che l'errore medio di interpolazione con la scelta di Chebychev è decrescente col crescere del numero dei nodi, anche se in maniera più lenta, mentre quello con la scelta di nodi equispaziati risulta crescente col crescere del numero dei nodi.

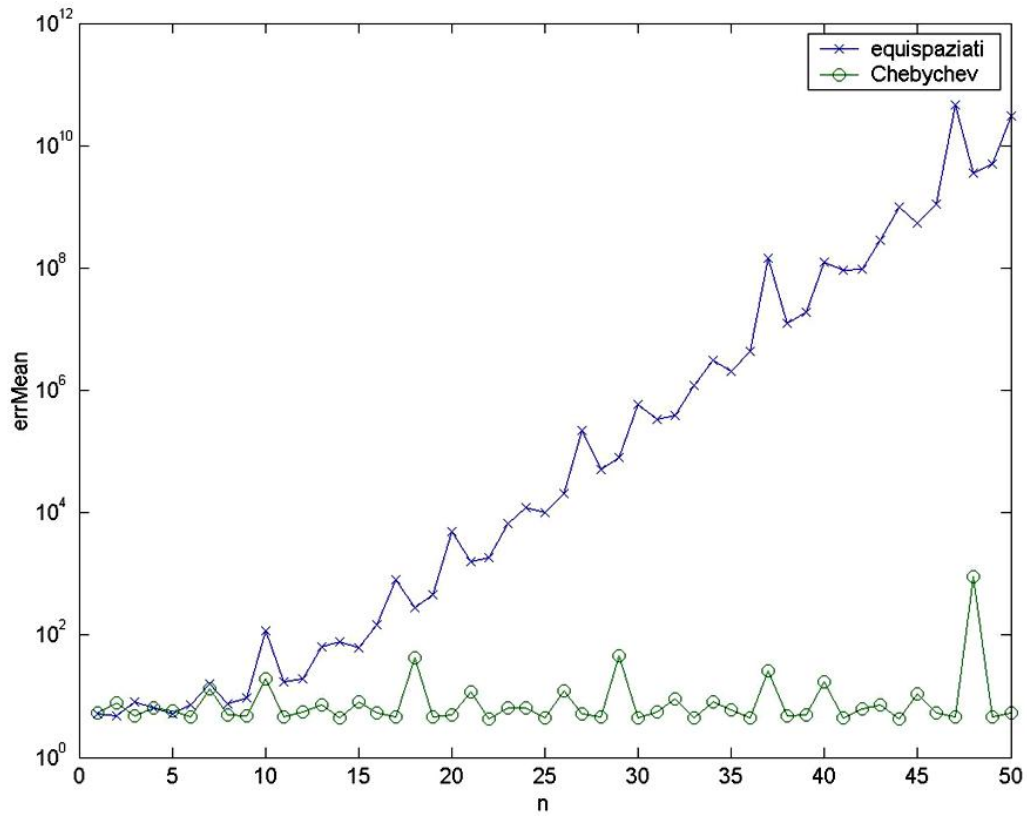
Nella figura 1.8 è riportato l'andamento della funzione interpolata con i due polinomi interpolanti che adottano le diverse distribuzioni dei nodi, per un numero di nodi pari a 15; si nota come, nonostante la scelta di Chebychev non sia quella ottimale per la funzione, il corrispondente polinomio interpolante risulta migliore di quello ottenuto con nodi equispaziati. In effetti nella pratica la scelta di Chebychev costituisce una buona scelta per varie funzioni, non solo quelle per cui si sa essere una scelta ottimale.



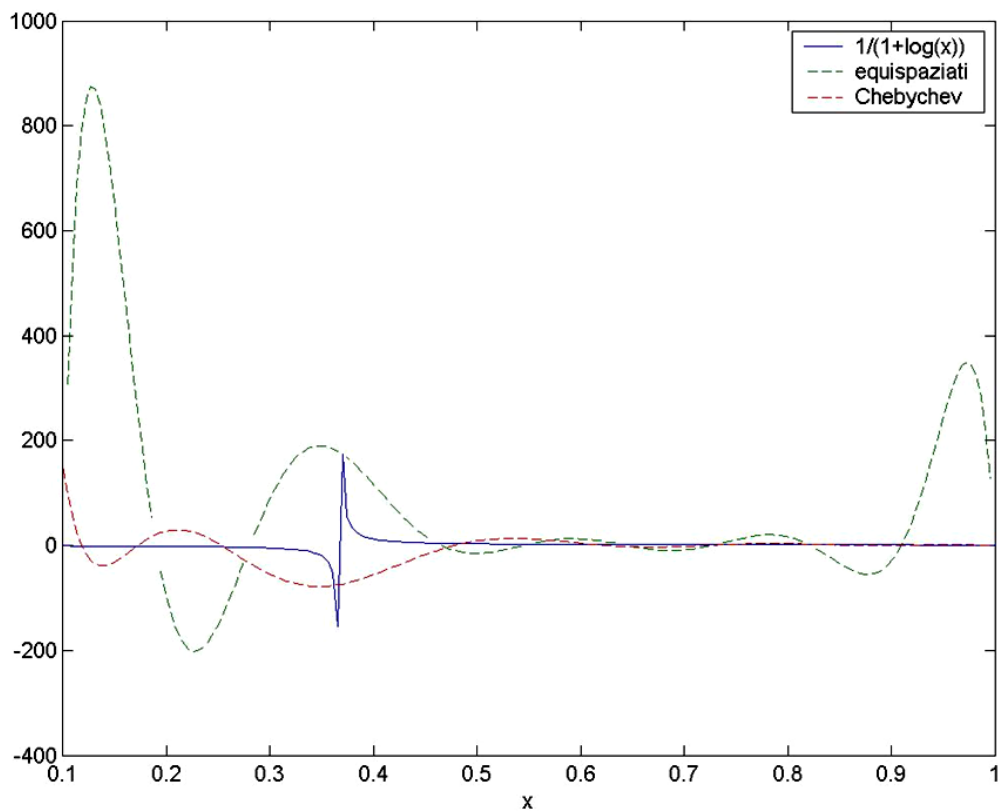
1.8 Polinomi interpolanti di ordine 14 della funzione segno per le due diverse distribuzioni dei nodi

- $\frac{1}{1+\log x}$ (estremi interpolazione [0.1,1])

Si possono tuttavia individuare delle funzioni che, anche con la scelta di Chebychev, il polinomio interpolante non riesce ad approssimare bene; è il caso di funzioni che presentano picchi molto veloci, quasi impulsivi, come ad esempio la funzione in esame.



1.9 Andamento dell'errore medio di interpolazione in funzione del numero dei nodi per le due distribuzioni



1.10 Polinomi interpolanti di ordine 10 della funzione per le due diverse distribuzioni dei nodi

L'andamento dell'errore medio rispetto al numero dei nodi è riportato in figura 1.9 per entrambe le scelte; si nota che come negli altri casi l'errore per scelta dei nodi equispaziati diverge verso l'infinito per n crescenti, mentre per la scelta di Chebychev l'errore non converge a zero, come negli altri casi, ma si mantiene pressoché costante anche per n abbastanza elevati. Ciò probabilmente dovutamente al fatto che essendoci un andamento della funzione che cambia rapidamente, quasi impulsivo, il polinomio fa fatica ad individuarlo e a seguirlo, come mostra la figura 1.10 dove è riportato l'andamento della funzione e dei polinomi interpolanti per le due scelte dei nodi con $n = 10$.

1.3 Funzioni spline

Le funzioni spline costituiscono una tipologia particolare di interpolazione di funzioni mediante polinomi; in particolare l'idea di base è quella di suddividere l'intervallo di interpolazione in sottointervalli e interpolare la funzione in ciascun sottointervallo mediante un polinomio di grado ridotto, invece che tentare di interpolare tutta la funzione con un unico polinomio di grado elevato, che spesso risulta abbastanza complicato. Una funzione spline è l'unione di tutti i polinomi interpolanti dei singoli sottointervalli e si presenta dunque come una funzione polinomiale a tratti.

Dato un intervallo di interpolazione $[a, b]$ una sua discretizzazione, ovvero una sua suddivisione in sottointervalli, si può indicare come

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\},$$

ed una spline $s(x)$ di grado p (o ordine $p + 1$) relativa a tale discretizzazione Δ è definita come funzione polinomiale a tratti, ovvero

$$s|_{[x_{j-1}, x_j]} \in \Pi_p, \quad j = 1, \dots, n,$$

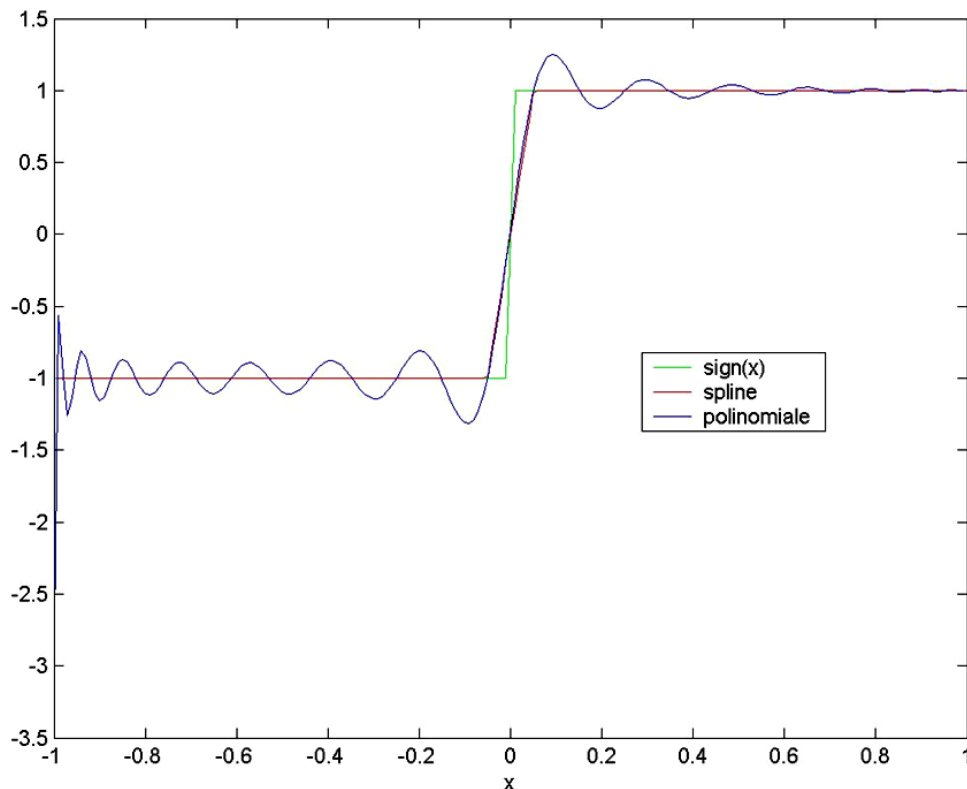
con derivata di ordine $p - 1$ continua

$$s \in C^{p-1}[a, b].$$

Per avere un'idea di come una spline anche di ordine ridotto riesca ad interpolare meglio una funzione di quanto non riesca a fare un polinomio interpolante di grado elevato si può osservare la figura 1.11; questa rappresenta l'andamento della funzione segno nell'intervallo $[-1, 1]$ in relazione alle sue approssimazioni mediante polinomio interpolante di grado 30 e spline lineare, ovvero costituita da polinomi di grado 1; il numero dei nodi è fissato dal grado del polinomio interpolante e risulta pari a 31.

Si nota facilmente che la spline lineare approssima in modo migliore la funzione segno nonostante il grado del polinomio interpolante sia abbastanza elevato; è da precisare

che il numero di punti e la distribuzione dei nodi è stata lasciata invariata per le due interpolazioni.

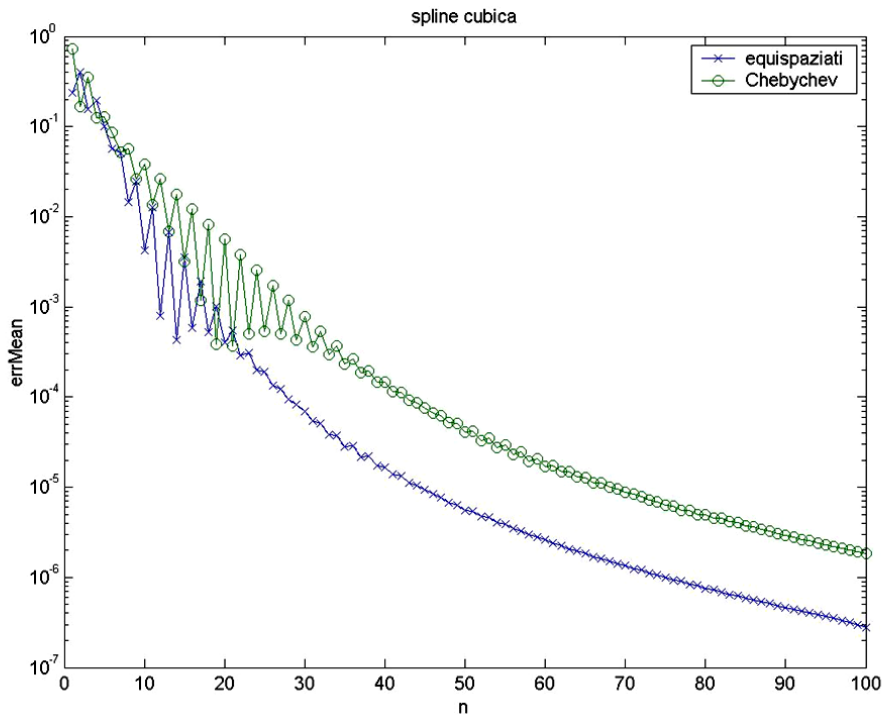


1.11 Funzione segno interpolata mediante polinomio interpolante di grado 30 e mediante spline lineare

1.3.1 Valutazione delle spline: distribuzione dei nodi

Per prima cosa si può osservare che le spline non risentono della particolare distribuzione dei nodi, al contrario della rappresentazione polinomiale; ciò in quanto la reale distribuzione dei nodi per l'interpolazione nella spline è quella relativa ai nodi di ogni singolo sottointervallo; dunque nel caso della scelta equispaziata si ha una permanenza di questo tipo di distribuzione anche nel sottointervallo ma nel caso di nodi di Chebychev si perde totalmente la distribuzione e anzi la distribuzione risulta diversa in ogni sottointervallo. Per testare realmente la distribuzione dei nodi di Chebychev in una spline bisognerebbe poter accedere all'algoritmo e sapere in che maniera vengono calcolati i sottointervalli di interpolazione per poter scegliere adeguatamente i punti. Per avere un'idea della non influenza di questo tipo di interpolazione alla scelta dei nodi si è testata una funzione che aveva dato risultati molto diversi al variare del numero dei nodi con le due distribuzioni, ovvero la funzione di Runge; dalla figura 1.10 si nota come l'errore medio di interpolazione mediante spline cubica (polinomi di ordine 3) della funzione di Runge calcolata nell'intervallo $[-1,1]$ converge a zero al crescere di n sia per la distribuzione equispaziata dei nodi, sia per nodi di Chebychev; oltretutto, come ci si poteva aspettare, l'errore medio ottenuto con la scelta dei nodi di Chebychev è addirittura

maggiore di quello ottenuto con nodi equispaziati, in quanto appunto la distribuzione viene persa nella suddivisione dell'intervallo di interpolazione. Tali risultati sono confermati anche dall'interpolazione mediante spline lineare, qui non riportata. L'errore medio è stato calcolato nella stessa maniera dei casi precedenti descritti nelle sezioni 1.1.4 e 1.2.2.



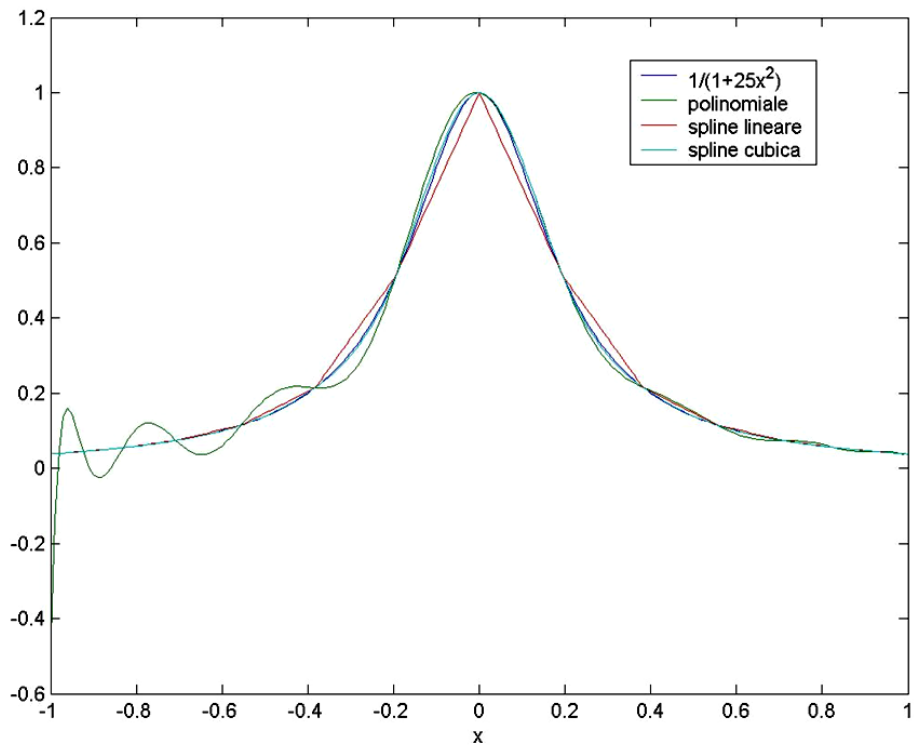
1.12 Andamento dell'errore medio di interpolazione della funzione di Runge mediante spline cubica con nodi equispaziati e di Chebychev

1.3.2 Valutazione delle spline: funzioni interpolate

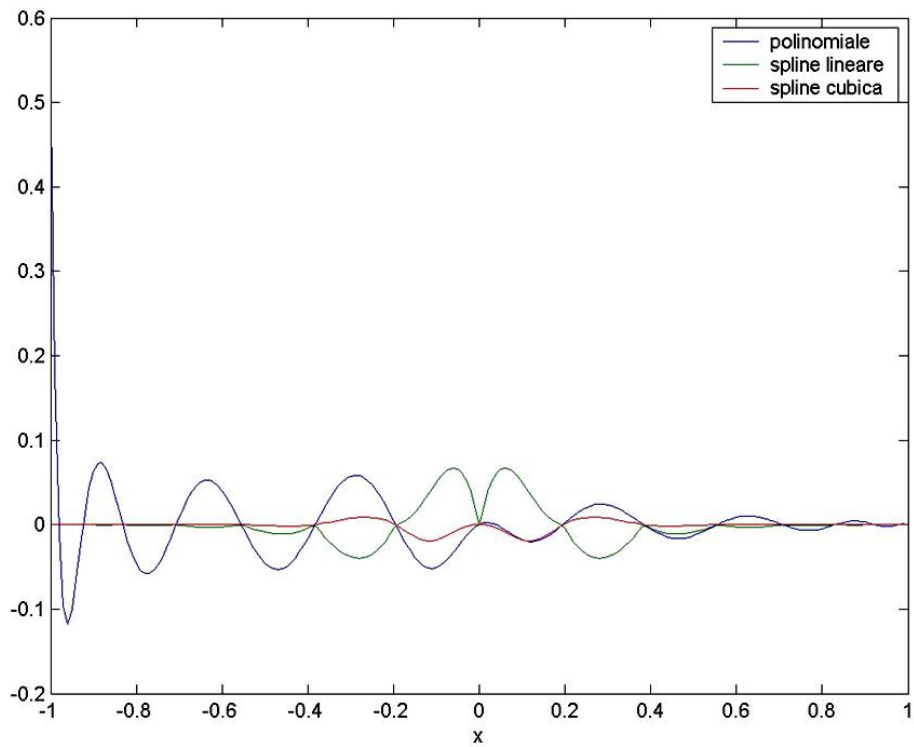
Nell'interpolazione mediante spline come visto si possono avere dei vantaggi rispetto all'interpolazione polinomiale, ma ciò dipende molto dalla funzione che si vuole interpolare; per dimostrare ciò proponiamo due casi opposti, uno in cui l'impiego delle spline è vantaggioso ed uno in cui non lo è; si sceglierà come distribuzione dei nodi quella di Chebychev, scelta ottimale nei casi osservati per l'interpolazione polinomiale. Per le valutazioni dell'errore anche in questo caso si è presa in considerazione la strategia descritta in precedenza di valutare l'errore di interpolazione su 201 ascisse e calcolarne quindi media, deviazione standard e massimo in valore assoluto.

Se si prende in considerazione la funzione di Runge nel caso polinomiale l'interpolazione trova molta difficoltà e spesso vi sono delle oscillazioni specie agli estremi dell'intervallo di interpolazione; con le funzioni spline invece si riesce ad interpolare meglio questa particolare funzione e ad eliminare le oscillazioni agli estremi dell'intervallo, come mostrato nella figura 1.13; nella tabella 1.3 viene illustrato l'errore di interpolazione nel caso di interpolazione polinomiale e spline lineare e cubica per la funzione di Runge nell'intervallo $[-1,1]$, in termini di errore

medio, deviazione standard e massimo in valore assoluto. Il polinomio interpolante utilizzato è di grado 15, dunque il numero dei nodi presi in considerazione risulta essere 16.



1.13 Interpolazione della funzione di Runge con polinomio interpolante, spline lineare e spline cubica



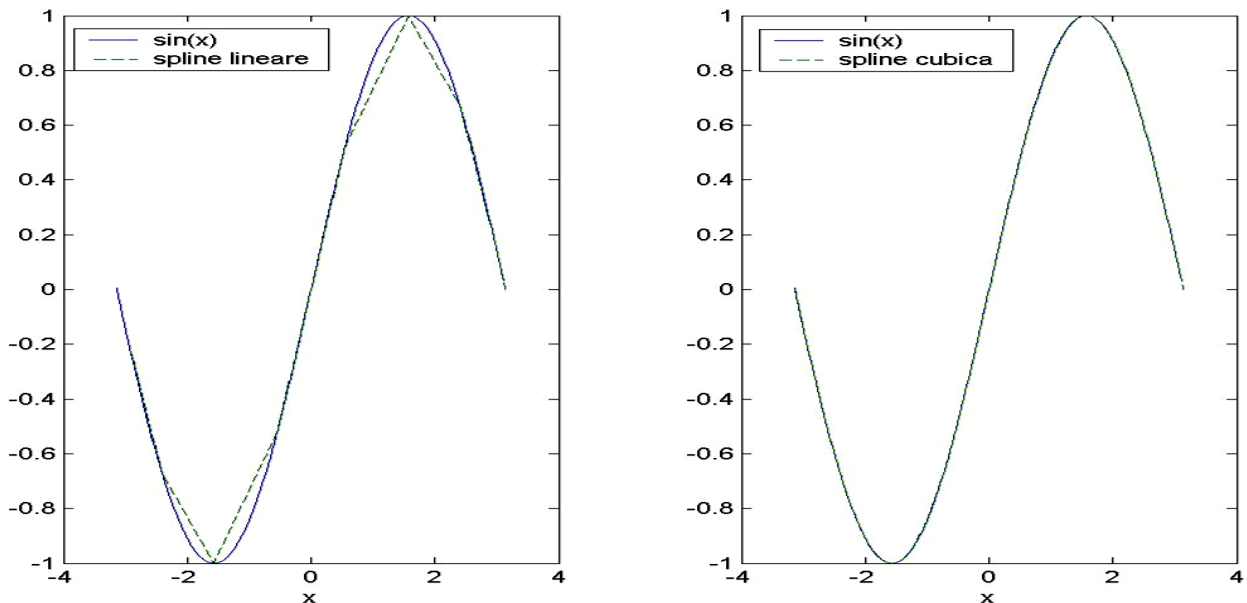
1.14 Errore di interpolazione in funzione delle ascisse di interpolazione

Nella figura 1.14 si riporta l'andamento dell'errore di interpolazione in funzione delle ascisse di interpolazione; si può notare come per l'interpolazione polinomiale l'errore decresce al crescere delle ascisse, risultando massimo all'estremo inferiore dell'intervallo; nel caso di interpolazione con spline lineare invece l'errore è massimo al centro dell'intervallo, dove la funzione ha una variazione più veloce e la retta spezzata fa più difficoltà a seguirla; nel caso della spline cubica l'andamento dell'errore è analogo a quello della spline lineare ma stavolta il valore dell'errore è minore in quanto una cubica spezzata riesce meglio ad interpolare una curva di quanto non possa fare una retta spezzata negli stessi sottointervalli di interpolazione.

1.3 Valori dell'errore di interpolazione per l'interpolazione della funzione di Runge con polinomio, spline lineare e spline cubica

INTERPOLAZIONE	ERRORE		
	MEAN	MAX	STD
Polinomiale	2,63E-3	5,234E-1	4,29E-2
Spline lineare	1,38E-2	6,74E-2	1,86E-2
Spline cubica	3,2E-3	1,91E-2	5E-3

Tuttavia se andiamo ad analizzare un'altra tipologia di funzioni come ad esempio le funzioni sinusoidali, si ha un comportamento opposto: si riesce ad interpolare meglio questa funzione tramite interpolazione polinomiale che tramite spline; a tali scopi si è interpolata e valutata la funzione seno nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ su 9 nodi totali.



1.15 Interpolazione della funzione seno mediante spline lineare (sinistra) e cubica (destra)

Come si può vedere dalla figura 1.15 la spline lineare non interpola bene la funzione a vista d'occhio; ci si poteva aspettare questo risultato visto il numero ridotto di punti e tenuto conto che la funzione, nel caso di spline lineare, viene interpolata con una serie

di rette. La spline cubica sembra interpolare abbastanza bene la funzione, ma il polinomio interpolante (qua non riportato) risulta migliore, come emerge dai dati d'errore schematizzati in tabella 1.4.

1.4 Valori dell'errore di interpolazione per l'interpolazione della funzione seno con polinomio, spline lineare e spline cubica

INTERPOLAZIONE	ERRORE		
	MEAN	MAX	STD
Polinomiale	2,615E-4	4,5E-3	4,6758E-4
Spline lineare	4,25E-2	1,122E-1	3,71E-2
Spline cubica	1,3E-3	1E-2	3,1E-3

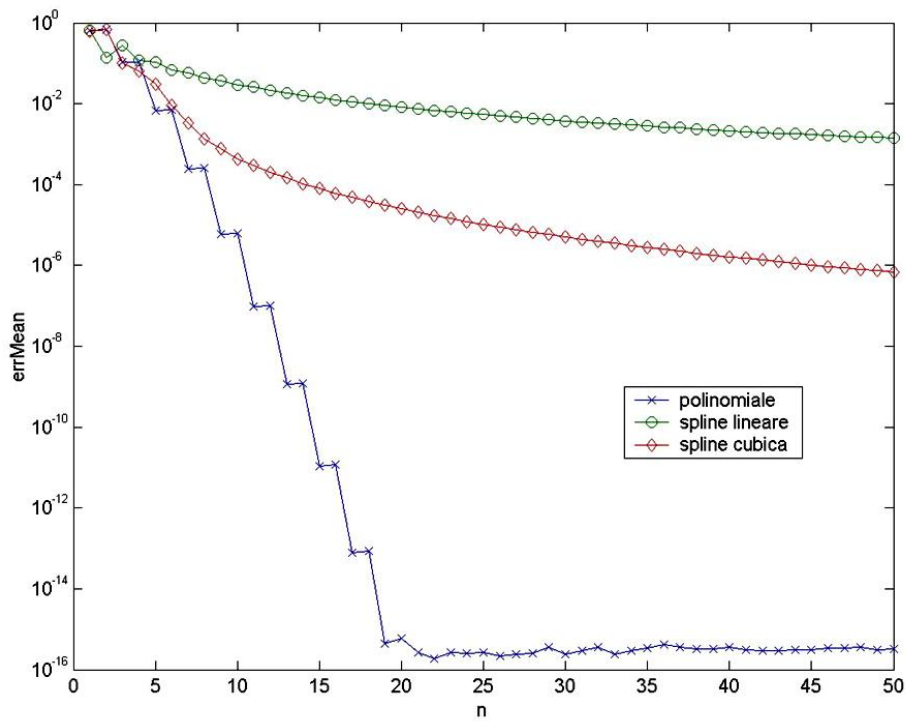
1.3.3 Valutazione delle spline: numero dei nodi

E' interessante vedere come le funzioni spline si comportano al variare del numero dei nodi su cui viene interpolata la funzione; in particolare vedremo come varia l'andamento dell'errore per diverse funzioni interpolate per numero di nodi crescenti. L'errore è ancora una volta quello di interpolazione definito nella sezione 1.1.4; come nei casi precedenti tale grandezza è stata misurata su 201 punti di valutazione e sul campione di errori risultanti da ogni funzione interpolata è stata estrapolata la media, la deviazione standard e il massimo in valore assoluto dell'errore stesso.

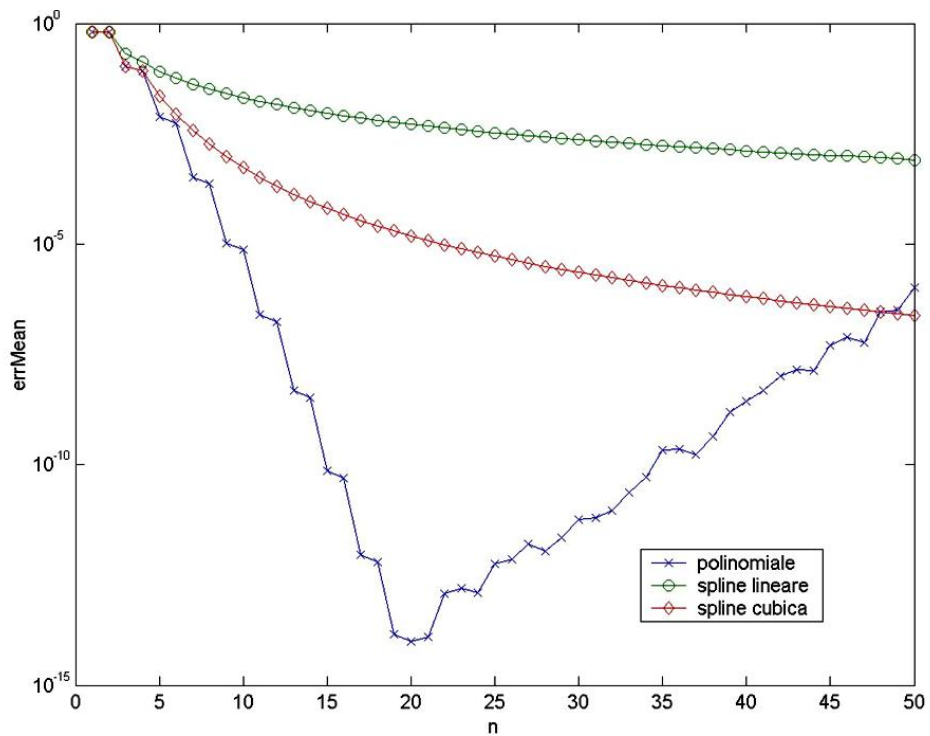
Per l'interpolazione polinomiale si è visto come il tendere a zero dell'errore o meno con l'aumento del numero dei nodi, e quindi del grado del polinomio, dipendesse dalla distribuzione dei nodi e dal tipo di funzione interpolata; in particolare si è anche individuata una famiglia di funzioni, quelle continue con la propria derivata prima, e una particolare distribuzione dei nodi, quella di Chebychev, per cui l'errore di interpolazione converge a zero per grado del polinomio n (dunque numero dei nodi $n + 1$) che tende all'infinito. Per le spline come vedremo il discorso è differente.

Per primo si è interpolata la funzione seno tra $[-\pi, \pi]$; nella sezione 1.3.2 si era visto come tale funzione risulta essere meglio approssimata con il polinomio interpolante rispetto alle spline, se si sceglie come distribuzione dei nodi quella di Chebychev. Osserviamo l'andamento dell'errore medio di interpolazione in funzione del numero dei nodi per interpolazione polinomiale, spline lineare e cubica, nel caso in cui si scelgano i nodi di Chebychev o quelli equispaziati. Dalla figura 1.16 si vede che come ci si aspettava l'errore relativo all'intepolazione polinomiale tende a zero al crescere di n , raggiungendo la precisione di macchina (10^{-16}); l'errore medio relativo alle spline invece sembra che vada saturando ad un livello di errore attorno ai 10^{-3} e ai 10^{-6} rispettivamente per il caso lineare e per quello cubico, o che comunque decresca molto lentamente. Nella figura 1.17 è illustrato invece l'andamento nel caso di nodi equispaziati; si può notare come in sostanza il comportamento delle spline non è

cambiato di tanto, ma l'errore relativo al polinomio interpolante invece raggiunge un valore minimo per $n = 20$ per poi iniziare a crescere, convergendo probabilmente all'infinito per n che tende all'infinito.



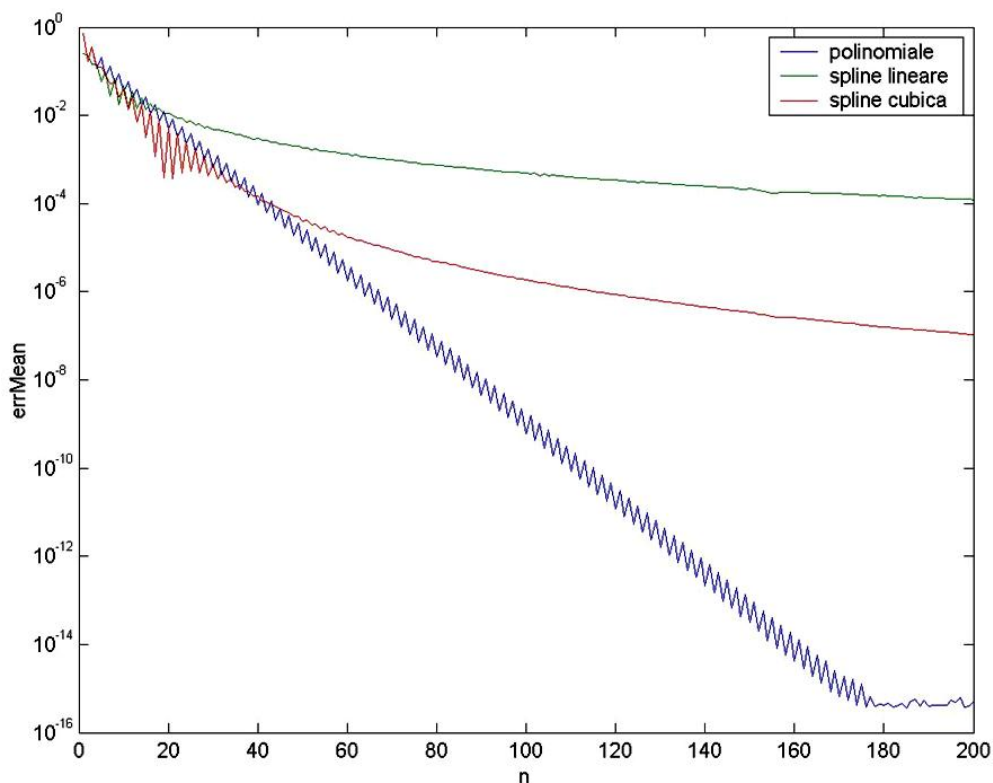
1.16 Errore medio di interpolazione della funzione seno con distribuzione dei nodi di Chebychev



1.17 Errore medio di interpolazione della funzione seno con distribuzione dei nodi equispaziata

Anche per l'errore rispetto alla funzione di Runge si ha un analogo comportamento delle spline, in quanto decresce molto lentamente dando l'impressione di saturare a valori più o meno fissi; l'andamento dell'errore per il polinomio interpolante è stato invece già studiato nei paragrafi precedenti e risulta crescente per distribuzione dei nodi equispaziata e decrescente per distribuzione dei nodi di Chebychev.

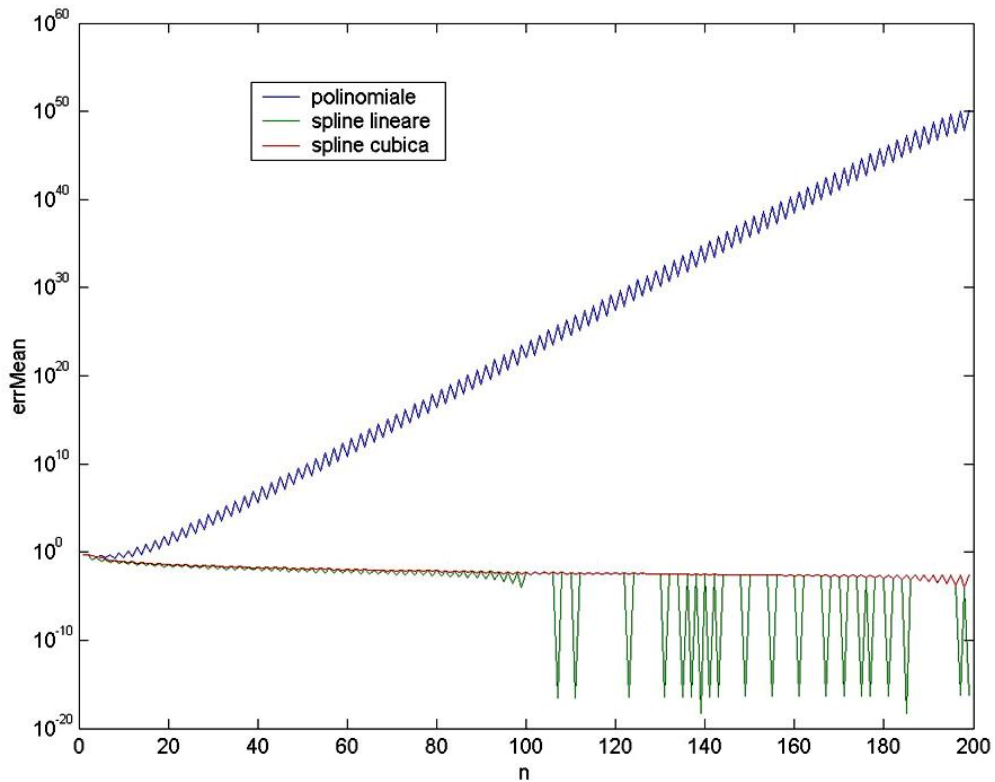
Nella figura 1.18 viene illustrato l'andamento dell'errore di interpolazione della funzione di Runge interpolata tra $[-1,1]$ al variare del numero dei nodi da 1 a 200 con distribuzione di Chebychev. Il risultato dell'errore di interpolazione per distribuzione equispaziata viene omesso ma come ci si aspetta ha andamento crescente nel caso di polinomio interpolante e analogo a quello in figura 1.18 per le spline.



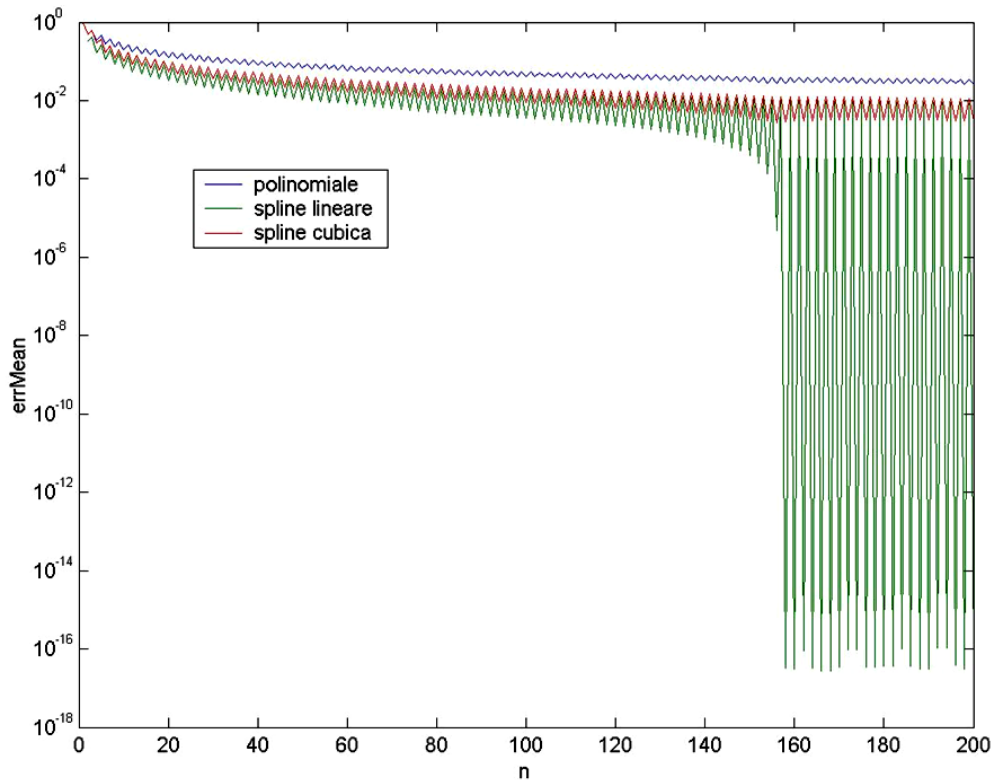
1.18 Errore medio di interpolazione della funzione di Runge con distribuzione dei nodi di Chebychev

Si è voluta interpolare una funzione non facente parte della famiglia di funzioni che, se viene scelta la distribuzione dei nodi di Chebychev, viene interpolata ottimamente in termini di errore dal polinomio interpolante. Tale funzione, già studiata nel caso polinomiale, è la funzione segno; per il caso polinomiale la scelta di Chebychev risultava migliore di quella di nodi equispaziati, anche se comunque la decrescita dell'errore all'aumentare di n era più lenta. La funzione segno è stata interpolata tra $[-1,1]$ per n che va da 1 a 200, per le due diverse distribuzioni. Nella figura 1.19 è riportato l'andamento dell'errore di interpolazione per nodi equispaziati; si nota come nel caso polinomiale, come già studiato, l'errore tende all'infinito al crescere del numero dei nodi; nel caso delle spline, invece, ancora una volta si ha la decrescita molto lenta, ma con dei picchi quasi periodici che tendono allo zero (o meglio alla precisione di macchina) nella spline lineare; tali picchi probabilmente corrispondono

ad un numero $n + 1$ dei nodi per cui la spezzata che costituisce la spline ha degli estremi dei sottointervalli che la costituiscono coincidenti coi punti di discontinuità della funzione segno, la quale ha forma di una retta spezzata.



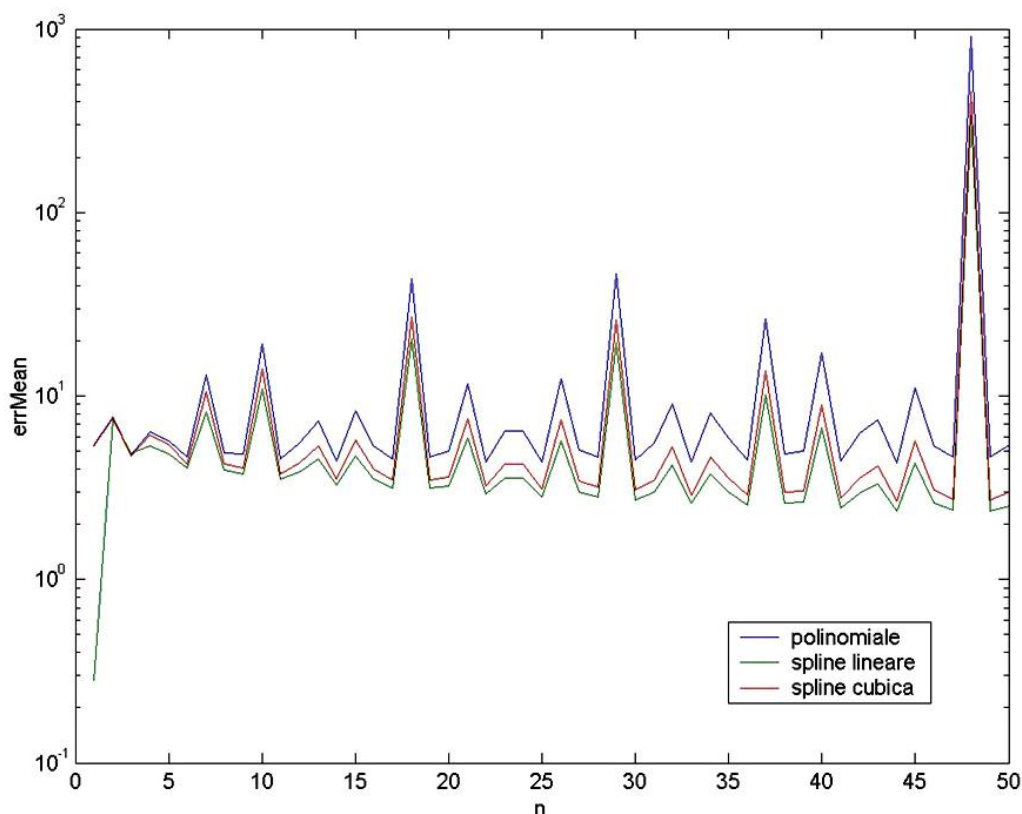
1.19 Errore medio di interpolazione della funzione segno con distribuzione dei nodi equispaziata



1.20 Errore medio di interpolazione della funzione segno con distribuzione dei nodi di Chebychev

Il caso di nodi di Chebyshev è riportato invece nella figura 1.20, dove si nota che l'errore per il caso polinomiale come ci si aspettava decresce, ma stavolta molto lentamente e sembra non tendere allo zero ma saturare similmente ai casi già visti per le spline; queste ultime hanno andamento lentamente decrescente e un errore di interpolazione minore del caso polinomiale; la spline lineare sembra approssimare meglio la funzione e per $n > 150$ rappresenta il fenomeno dei picchi verso lo zero.

Infine si è interpolata la funzione, vista nella sezione 1.2.2, per cui anche con la scelta di Chebyshev l'errore medio di interpolazione si presentava non decrescente al crescere del numero dei nodi; tale funzione è $\frac{1}{1+\log x}$, che presentava un picco molto pronunciato difficile da rappresentare mediante polinomio. Nelle figura 1.21 è riportato l'andamento dell'errore medio di interpolazione della funzione in questione per polinomio interpolante, spline lineare e cubica interpolata in $[0.1,1]$ con scelta di distribuzione dei nodi di Chebyshev; l'andamento dell'errore per nodi equispaziati non è riportato ma risulta più o meno analogo a quello per la scelta di Chebyshev sia per il polinomio interpolante che per le spline.



1.21 Errore medio di interpolazione della funzione $\frac{1}{1+\log x}$ con distribuzione dei nodi di Chebyshev

Si nota anche in tal caso che la funzione $\frac{1}{1+\log x}$ risulta molto ardua da interpolare sia tramite un polinomio unico, come già si sapeva, sia tramite spline; le spline in linea teorica potrebbero riuscire ad interpolare meglio la funzione, se tra i nodi vi fosse il picco massimo e ivi ricadesse un estremo di qualche sottointervallo; tuttavia riuscire ad avere un nodo corrispondente al picco è molto difficile e le probabilità che ciò accada

sono molto scarse, in quanto il picco risulta molto ripido. Dunque per tale tipologia di funzione neanche le spline riescono nell'interpolazione, nonostante comunque presentino un errore medio in generale minore del polinomio interpolante.

Da tutti gli esempi visti si nota che l'errore medio di interpolazione nelle spline, a differenza delle interpolazioni con un unico polinomio, ha in generale un andamento sempre lentamente decrescente col crescere del numero dei nodi; in alcuni casi, dovutamente a correlazioni tra la forma della funzione (specie discontinua) e la tipologia di spline, si possono verificare fenomeni periodici in cui l'errore medio assume valore zero per determinati valori di n , ma non è individuabile un particolare numero dei nodi accettabile nella pratica oltre il quale l'errore è sempre molto vicino alla precisione di macchina.

2 Approssimazione di funzioni

Talvolta i dati che si hanno a disposizione di una funzione che si vuole interpolare risultano affetti da errore; è il caso ad esempio di un qualunque segnale elettrico che viene acquisito, per la presenza inevitabile del rumore termico. Nella pratica si ha a che fare molto frequentemente con questo tipo di dati e laddove vi sia la necessità di rappresentare il segnale numericamente l'interpolazione dei dati rumorosi non è la scelta migliore; in questi casi si ricorre infatti ad una approssimazione dei dati con una funzione semplice da trattare, senza necessità che questa interpoli i dati rumorosi. Ancora una volta la scelta più comune è quella polinomiale; il problema in tal caso diventa quello di determinare il polinomio di migliore approssimazione della funzione rumorosa f , ovvero di trovare il polinomio di grado n che minimizzi una norma dell'errore

$$\min_{p_n \in \Pi_n} \|p_n - f\|.$$

2.1 Approssimazione nel senso dei minimi quadrati

La norma che viene scelta più spesso, specie per motivi di maggiore semplicità computazionale, è sicuramente la norma di $L^2[a, b]$, ovvero la norma-2, definita come

$$\|p_n - f\|_2 = \left(\int_a^b [p_n(x) - f(x)]^2 dx \right)^{1/2}.$$

In tal caso si parla di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati.

Se, come nei casi analizzati, si ha a disposizione solo un numero discreto di punti della funzione rumorosa f si può trovare una discretizzazione della norma-2. Si considerino $m + 1$ punti di ascissa $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ di cui sono note le ordinate $\{y_0, y_1, \dots, y_m\}$, con $y_i = f(x_i)$, per $i = 0, 1, \dots, m$ valori della funzione rumorosa relativi alle ascisse disponibili; fissato un numero naturale $n \leq m$, per qualunque polinomio $p_n \in \Pi_n$ la norma diventa

$$\|p_n - f\|_2 = \left(\sum_{i=0}^m [p_n(x_i) - f(x_i)]^2 \right)^{1/2}.$$

Il problema di minimo diventa dunque determinare il polinomio $p_n^*(x)$ tale che

$$p_n^*(x) = \min_{p_n \in \Pi_n} \|p_n - f\|_2^2,$$

con la norma appena definita in maniera discreta. E' da notare che se $m = n$ la soluzione del problema non è altro che il polinomio interpolante, mentre se $m > n$ la soluzione costituisce la migliore approssimazione ai minimi quadrati.

Come nel caso del polinomio interpolante il polinomio di migliore approssimazione può essere espresso in varie basi, che ne caratterizzano l'algoritmo di calcolo rispettivo. Se si impiega la base canonica si avrà

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x_i^j = (X\mathbf{a})_i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

con $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ vettore dei coefficienti del polinomio e X matrice di Vandermonde di dimensione $(m+1) \times (n+1)$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^n \end{bmatrix}.$$

Sostituendo nella norma-2 discreta al quadrato

$$\|p_n - f\|_2^2 = \sum_{i=0}^m [(X\mathbf{a})_i - y_i]^2 = \|X\mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2^2,$$

e il problema equivale alla risoluzione di un sistema lineare sovradeterminato nel senso dei minimi quadrati.

2.2 Valutazione del polinomio di migliore approssimazione

La valutazione del polinomio di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati seguirà in sostanza il criterio e gli strumenti di valutazione del polinomio interpolante; si valuterà l'errore di approssimazione definendolo come

$$E_n(x) = f(x) - p_n^*(x),$$

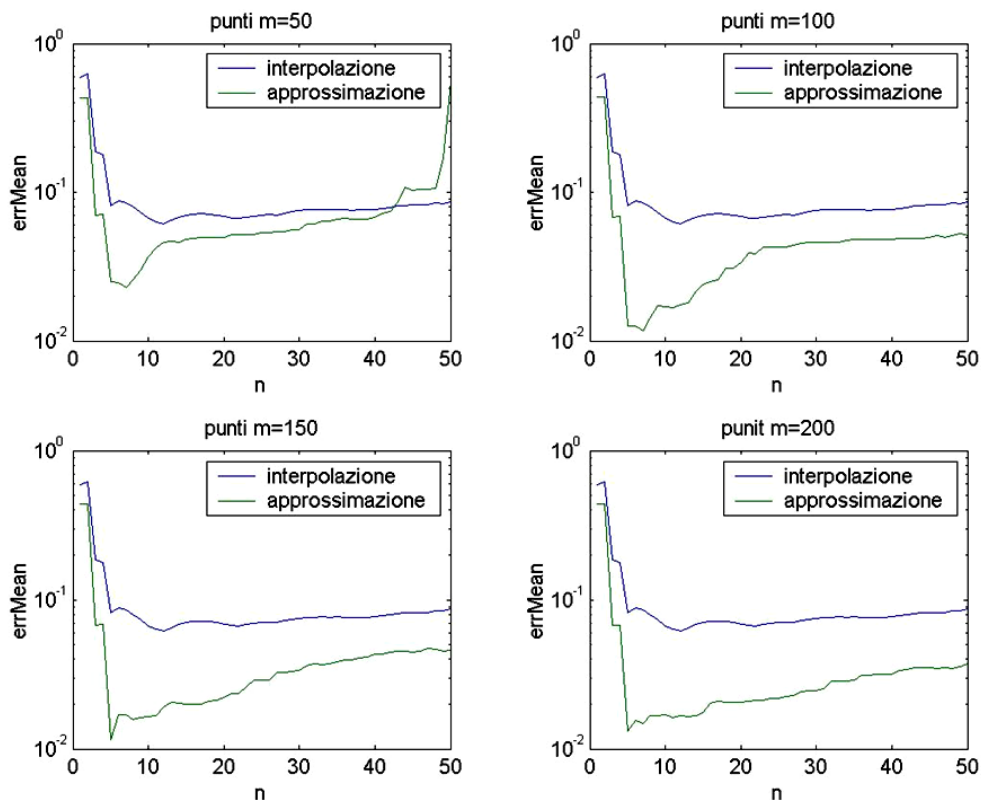
e se ne riporterà, valutando il polinomio di migliore approssimazione e la funzione su 201 ascisse equispaziate nell'intervallo di approssimazione, la media (MEAN), la deviazione standard (STD) e il massimo in valore assoluto (MAX). I criteri di valutazione saranno in base al numero dei nodi e in base al grado del polinomio di migliore approssimazione; verrà fatto sempre un confronto con il polinomio interpolante per gli stessi dati rumorosi a disposizione. Il rumore introdotto sui dati segue una distribuzione statistica di tipo gaussiano a media nulla, deviazione standard e varianza unitarie, del tutto analogo al rumore termico elettrico bianco. E'

stata imposta l'entità di tale perturbazione rumorosa, ovvero l'ordine di grandezza dell'errore sui dati corrispondente al rumore in questione.

2.2.1 Il numero dei nodi e il grado del polinomio

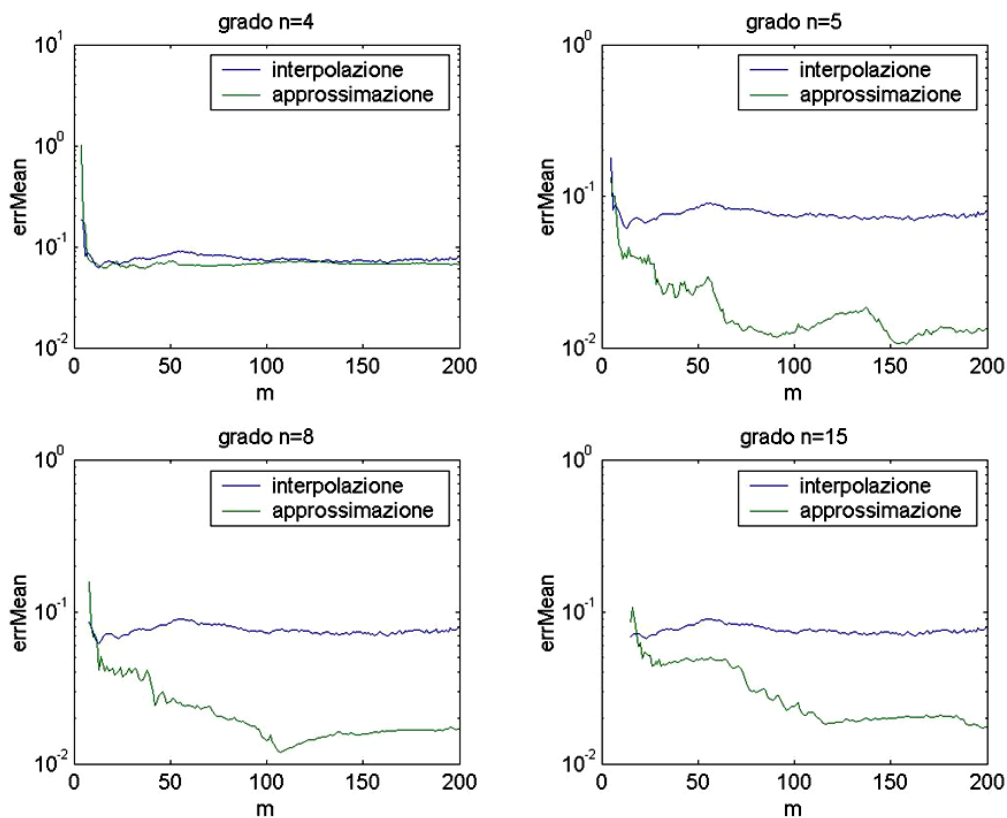
Il numero dei nodi e il grado del polinomio sono due parametri del polinomio di migliore approssimazione dipendenti l'uno dall'altro; partendo dal presupposto che il grado del polinomio n e il numero dei nodi $m + 1$ devono rispettare quanto detto in precedenza, ovvero che $n \leq m$, si vuole studiare in tale sezione l'andamento dell'errore medio al variare del numero dei nodi e al variare del grado del polinomio. In particolare si valuterà l'errore al variare del numero dei nodi $m + 1$ per valori di n fissati ed in seguito si valuterà l'errore al variare del grado del polinomio n per valori di $m + 1$ fissati. L'errore risultante dall'approssimazione verrà sempre confrontato con l'errore di interpolazione del polinomio interpolante, ovvero con il polinomio di migliore approssimazione per $m = n$; in tal caso, essendo fissato il rapporto tra m e n , è possibile l'assegnazione arbitraria di uno solo tra questi due valori mentre l'altro è determinato di conseguenza; a seconda del test il parametro assegnato sarà sempre quello che varia e non quello fissato: quando si valuta l'errore al variare di n per $m + 1$ fissato verrà assegnato n , mentre quando si valuta l'errore al variare di $m + 1$ per n fissato verrà assegnato m . La distribuzione dei nodi scelta sarà sempre quella di Chebychev e l'entità della perturbazione rumorosa sulla funzione sarà sempre pari a 10^{-1} ; il test verrà ripetuto per diverse funzioni rumorose.

- **sin x** (estremi interpolazione $[-\pi, \pi]$)



2.1 Andamento dell'errore medio in funzione del grado del polinomio per numero di punti fissato

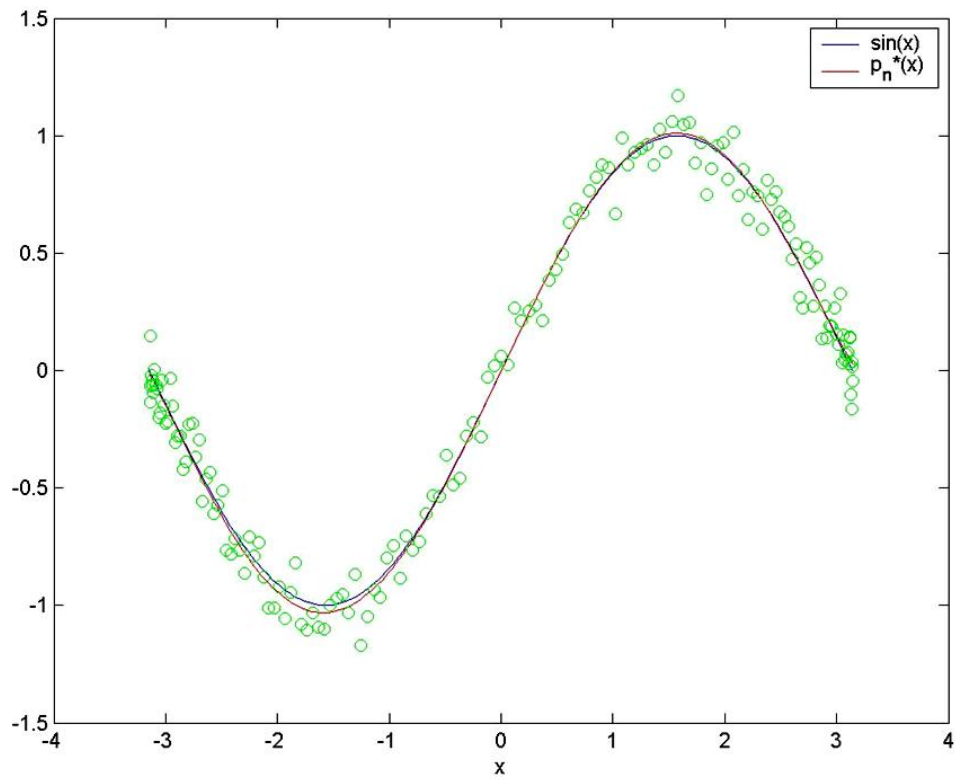
Nella figura 2.1 si nota come l'andamento dell'errore in funzione del grado del polinomio di migliore approssimazione in linea di massima presenta un minimo assoluto per valori di n inferiori alla decina. Il minimo ricade pressappoco nello stesso intorno per tutti i numeri di nodi $m + 1$ presi in considerazione; ciò fa pensare che per tale funzione specifica esista un grado del polinomio ottimale per cui l'errore di approssimazione risulti minimo. Nella figura 2.2 si può notare come i polinomi di migliore approssimazione dei gradi considerati, ad eccezione di quello di grado $n = 4$, abbiano tutti un comportamento pressoché simile rispetto all'errore medio di approssimazione; dunque la scelta del grado sarà probabilmente dettata dal numero di nodi disponibili, se questa come spesso accade, è una grandezza fissata.



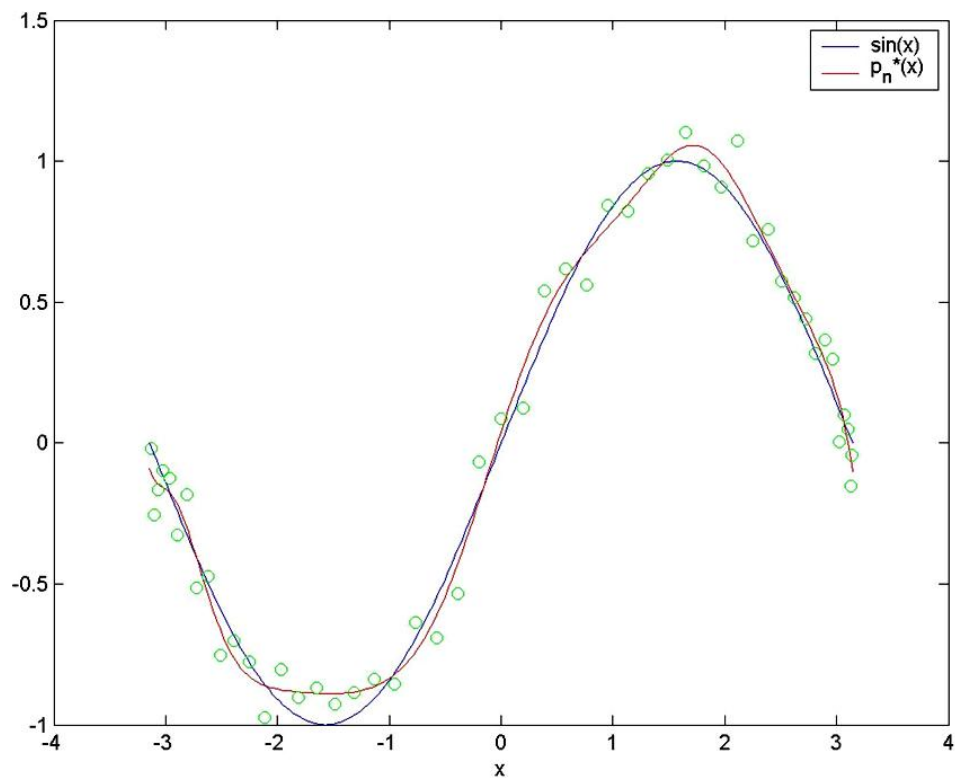
2.2 Andamento dell'errore medio in funzione del numero di punti per grado del polinomio fissato

Una scelta dei parametri con cui ottenere una buona approssimazione della funzione in questione nelle condizioni in esame può essere quella di prendere un polinomio di grado 5 con 160 punti disponibili, come mostrato in figura 2.3; una scelta svantaggiosa invece potrebbe essere prendere un polinomio di grado 15 con 50 punti a disposizione, come illustra invece la figura 2.4.

In sostanza dunque, studiando l'andamento dell'errore per una singola funzione è possibile individuare una scelta dei parametri particolarmente vantaggiosa per rappresentare accuratamente la funzione specifica sotto esame affetta da rumore con il polinomio di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati.



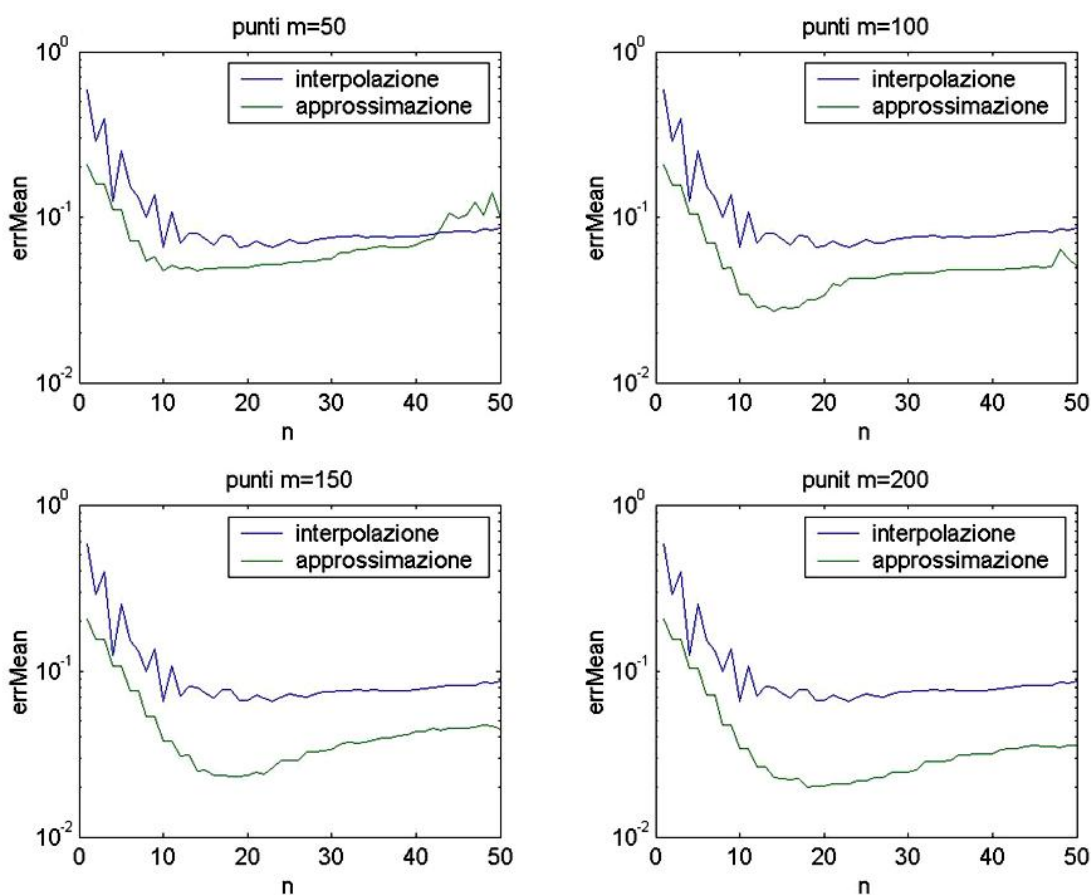
2.3 Polinomio di migliore approssimazione di grado 5 con 160 dati disponibili



2.4 Polinomio di migliore approssimazione di grado 15 con 50 dati disponibili

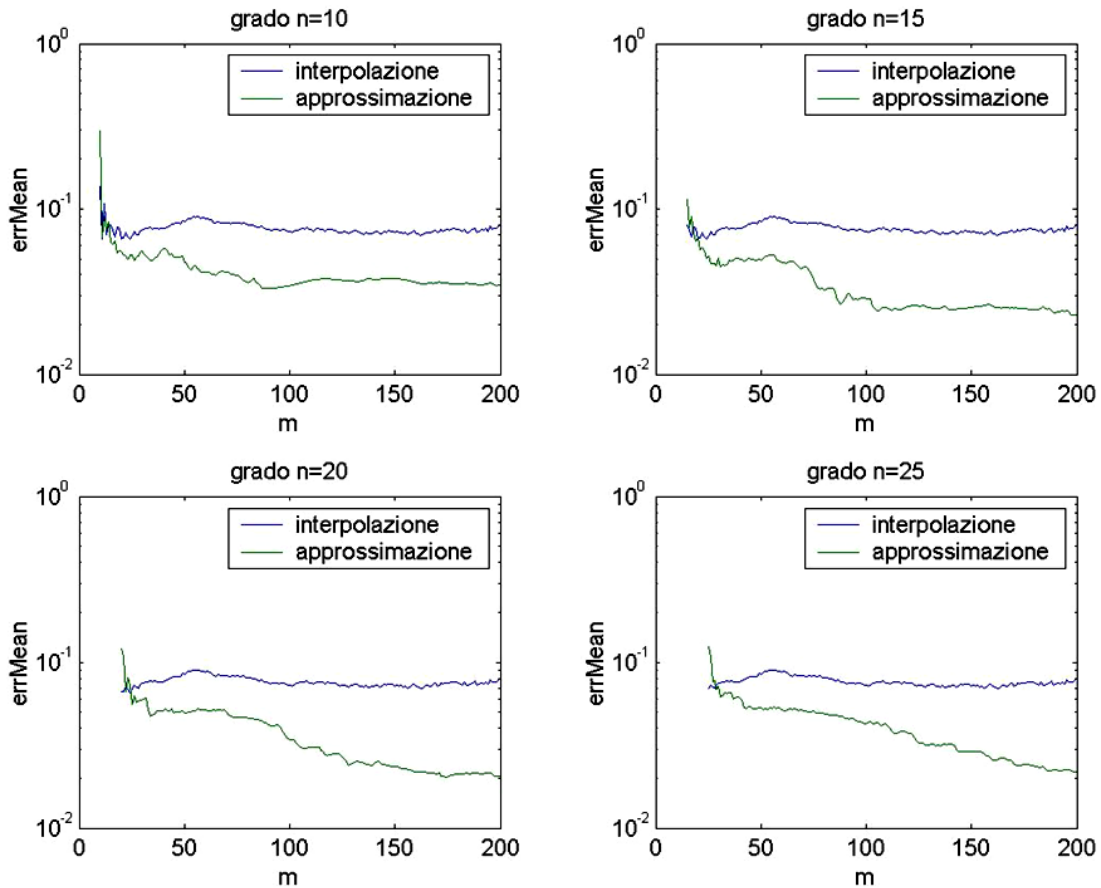
$$- \frac{1}{(1+25x^2)} \text{ (estremi interpolazione } [-1,1])$$

Si è presa in considerazione come altra funzione per la verifica dell'approssimazione di funzioni nel senso dei minimi quadrati la funzione di Runge, particolarmente ardua anche da interpolare. Per tale funzione, come nel caso della funzione seno, si è studiato dapprima l'andamento dell'errore medio al variare del grado del polinomio di migliore approssimazione e per quantità di nodi fissate; i grafici risultanti da questa prima analisi sono riportati in figura 2.5.



2.5 Andamento dell'errore medio in funzione del grado del polinomio per numero di punti fissato

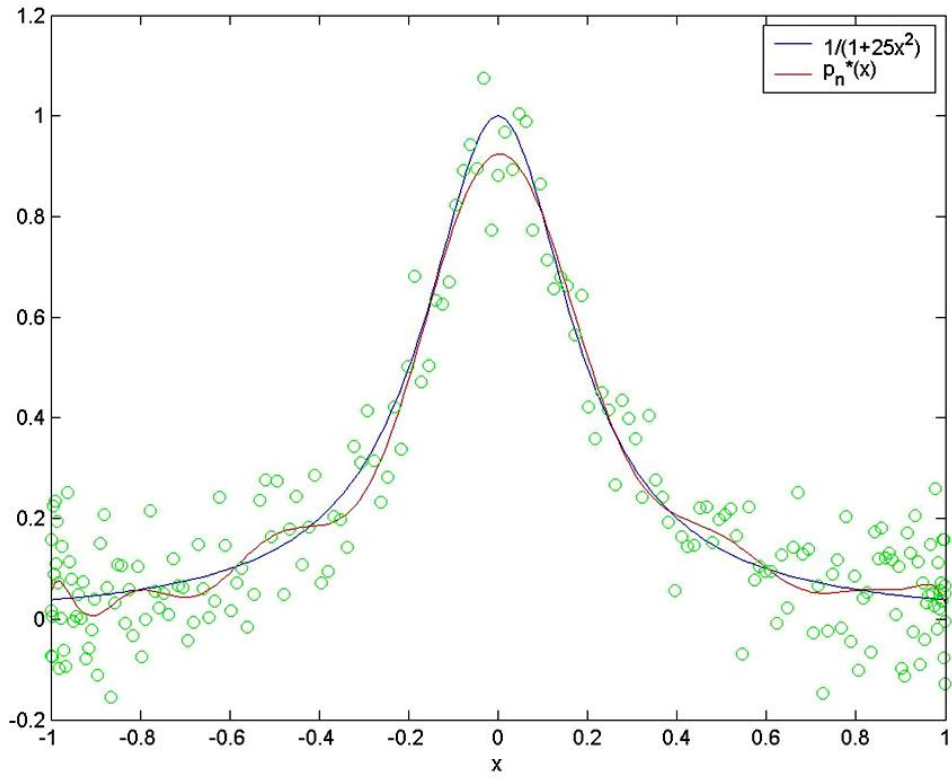
Dai grafici si può notare come stavolta il grado del polinomio per cui risulta esserci un minimo nell'andamento dell'errore medio ricade pressappoco tra $n = 10$ e $n = 20$. L'andamento dell'errore è in generale analogo per tutti i numeri di nodi considerati ad eccezione di $m = 50$, dove risulta peggiore. Nella figura 2.6 è illustrato l'andamento dell'errore medio di approssimazione per gradi del polinomio vicini al minimo individuato in precedenza; dalla figura si nota che i gradi $n = 15$, $n = 20$ e $n = 25$ sembrano essere delle buone scelte per l'approssimazione della funzione nelle condizioni considerate; l'andamento dell'errore per queste scelte del grado del polinomio sembra continuare a decrescere anche per n maggiori di quelli considerati. Il polinomio di grado $n = 10$ ha un andamento dell'errore peggiore.



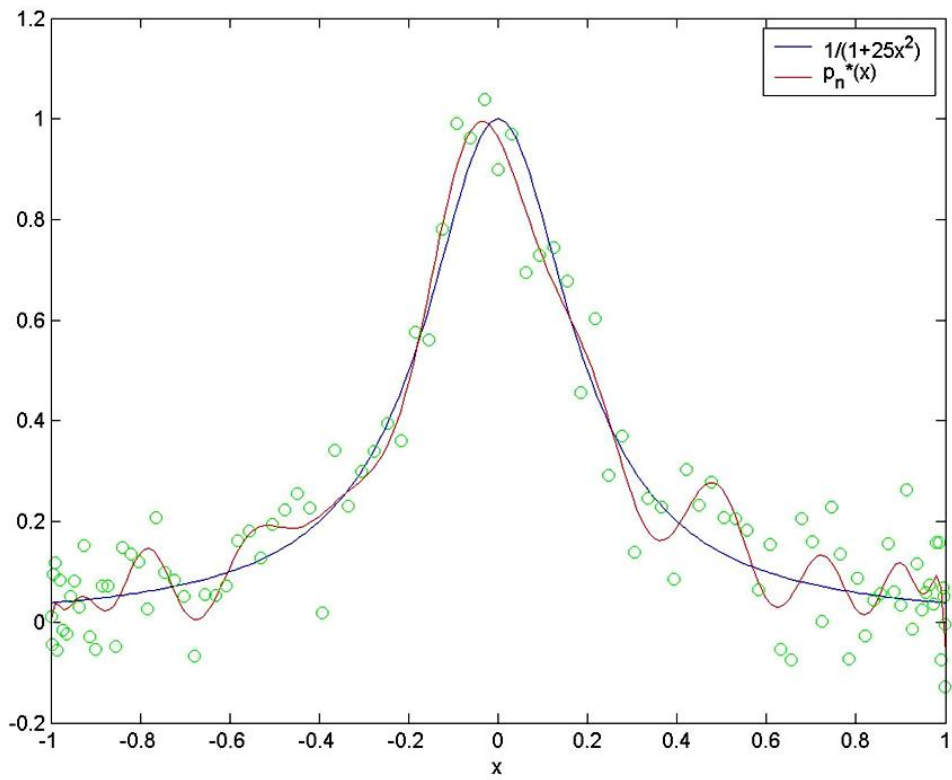
2.6 Andamento dell'errore medio in funzione del numero di punti per grado del polinomio fissato

Confrontando le due funzioni analizzate in sostanza l'andamento dell'errore medio di approssimazione è analogo; se infatti si considera il grado del polinomio di migliore approssimazione, l'errore medio all'aumentare del grado dapprima diminuisce, descrivendo un minimo, dopodiché inizia a crescere tendendo all'infinito per gradi che tendono all'infinito; se si considera il numero dei nodi, l'errore medio al crescere di m ha un andamento decrescente non monotono e converge lentamente a zero per $m \rightarrow \infty$. Una buona strategia per individuare dei parametri ottimali per rappresentare la funzione mediante polinomio di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati è dunque quella di fare dapprima un'analisi dell'errore al variare del grado n ; se il numero dei nodi $m + 1$ è fissato allora si fa direttamente l'analisi per tale numero dei nodi; in caso contrario si individua il minimo dell'errore medio al variare di n per alcuni valori di m , dopodiché si attua una nuova analisi dell'errore stavolta al variare di m e si individua un numero di nodi sufficiente da avere errori di approssimazione accettabili per gli scopi del caso. Tale strategia tuttavia richiede la conoscenza della tipologia di funzione rumorosa da rappresentare, per poterne valutare l'errore.

Nel caso analizzato ad esempio una buona scelta dei parametri potrebbe essere $n = 15$ e $m = 200$ come mostrato in figura 2.7; una scelta molto svantaggiosa potrebbe invece essere quella mostrata in figura 2.8 con $n = 25$ e $m = 100$.

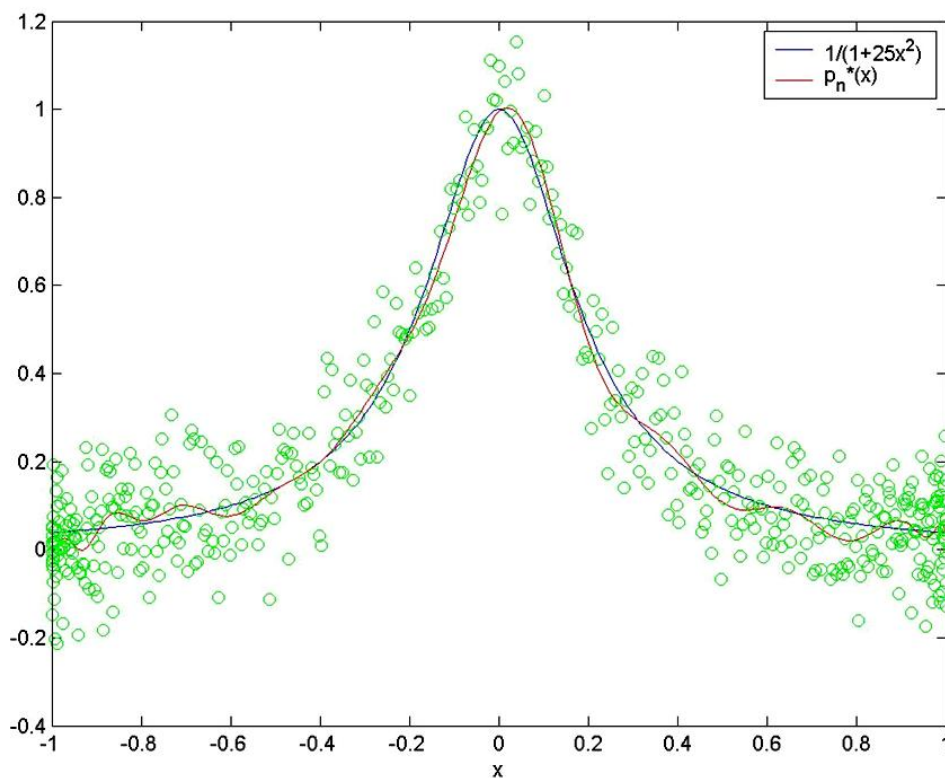


2.7 Polinomio di migliore approssimazione di grado 15 con 200 dati disponibili



2.8 Polinomio di migliore approssimazione di grado 25 con 100 dati disponibili

Da quanto visto finora si può immaginare esista un rapporto minimo tra i parametri m e n che dia un errore medio contenuto; infatti entrambe le scelte presentate come vantaggiose sia nel caso della funzione seno che nel caso della funzione di Runge il rapporto $\frac{m}{n}$ è sempre maggiore di 10 e anzi nel caso della funzione seno, dove l'approssimazione sembrava essere molto precisa, il rapporto era anche sopra il 20. Tale osservazione comunque non è poi così illuminante visto che l'errore medio in tutti i casi decresce con l'aumentare di m , quantità a cui tale rapporto è direttamente proporzionale; tuttavia ci può aiutare a dare un numero di dati orientativo per cui l'errore medio sia molto piccolo, tale da garantire una buona approssimazione della funzione; se ad esempio nel caso presentato come svantaggioso dove si sceglieva $n = 25$ e $m = 100$ per approssimare la funzione di Runge avessimo scelto $m = 500$ e dunque $\frac{m}{n} = 20$, avremmo ottenuto una buona approssimazione della funzione, come mostra la figura 2.9.



2.9 Polinomio di migliore approssimazione di grado 25 con 500 dati disponibili

Bisogna ricordare tuttavia che il grado del polinomio non va scelto arbitrariamente in quanto occorre riuscire a posizionarsi nel minimo assoluto dell'errore medio, come mostrato in precedenza; in caso contrario il grado adottato potrebbe comunque non consentire un'approssimazione particolarmente precisa.

3 Conclusioni

Da quanto si è visto in generale non esiste una scelta unica e ottimale per l'approssimazione di funzioni campionate, di cui è noto solo un certo numero di valori; a seconda della funzione infatti può essere più vantaggiosa la scelta di un polinomio interpolante, di una spline o ancora di un polinomio di migliore approssimazione. Per poter riuscire ad avere sempre buone rappresentazioni delle funzioni che si vuole approssimare bisognerebbe disporre di un algoritmo che, sfruttando varie informazioni sulla funzione, scelga un tipo di rappresentazione ed imposti in maniera ottimale i rispettivi parametri; queste informazioni potrebbero essere numero dei nodi, tipologia della funzione, entità del rumore sui dati, possibilità di scelta della distribuzione dei nodi, etc.