UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
SCUOLA DI DOTTORATO IN INGEGNERIA INDUSTRIALE

Tesina di Metodi Iterativi per la Risoluzione di Sistemi Lineari e Non Lineari

Applicazione dei metodi diretti per lo studio di un elemento flessionale

---

Pintus Roberto
Pisano Cecilia
Serra Simone

28 Settembre 2009

Il metodo di eliminazione di Gauss rivisto come metodo di fattorizzazione

La fattorizzazione LU

Data una matrice A ($n \times n$) di forma generale e non singolare si vuole risolvere il sistema

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

fattorizzando (o decomponendo) la matrice A nel prodotto

$$A=LU$$

dove U è una matrice triangolare superiore tale che

$$U_{ij} = a_{ij} \ \ per\ i<j$$

$$U_{ij} = 0 \ \ per\ \ i>j$$

e L è una matrice triangolare inferiore tale che

$$L_{ij} = m_{ij} \ \ per\ i>j$$

$$L_{ii} = 1$$

$$L_{ij} = 0 \ \ per\ \ j>i$$

Ogniqualvolta si conoscano i fattori triangolari L e U della matrice A, la risoluzione del problema fattorizzato comporta semplicemente la soluzione di due sistemi triangolari

$$L\vec{y}=\vec{b}$$

$$U\vec{x}=\vec{y}$$

Matlab calcola la fattorizzazione LU di una matrice con il comando

$$[L,U]=lu(A)$$

La fattorizzazione QR

Tale fattorizzazione può essere applicata anche a matrici A triangolari. Per ogni matrice A ($m \times n$) con $m \geq n$ esiste un'unica matrice Q ($m \times n$) tale che

$$Q^T Q=D$$

dove

$$D = diag\ (d_1, \ldots\ldots, d_n)$$

con

$$d_k > 0$$

e una matrice R ($n \times n$) triangolare superiore, con

$$r_{kk} = 1$$

tale che

$$A = QR$$

La risoluzione del problema fattorizzato comporta semplicemente la soluzione di un sistema diagonale

$$D\vec{y} = Q^T\vec{b}$$

che può essere riscritto come

$$Q\vec{c} = \vec{b}$$

e un sistema triangolare superiore

$$R\vec{x} = \vec{c}$$

Matlab calcola la fattorizzazione QR di una matrice con il comando

$$[Q, R] = qr(A)$$

La fattorizzazione SVD

La decomposizione a valori singolari (SVD) è basata sull'uso di autovalori e autovettori. Data una matrice A ($m \times n$) con $m \geq n$ è possibile fattorizzare tale matrice come

$$A = U\Sigma V^T$$

dove U è una matrice quadrata di ordine m unitaria, V è una matrice quadrata di ordine n unitaria e è una matrice diagonale di elementi non negativi (valori singolari della matrice A). La matrice A viene decomposta tramite un metodo iterativo.

Matlab calcola la fattorizzazione SVD tramite il comando

$$[U, S, V] = svd(A)$$

Tale fattorizzazione viene sostituita con la fattorizzazione TSVD quando la matrice A è malcondizionata.

TEST SUI METODI DIRETTI DI RISOLUZIONE DEI SISTEMI LINEARI

Un sistema di n equazioni lineari in n incognite può essere scritto sotto forma matriciale nel seguente modo:

A**x=b**

dove A è la matrice nxn dei coefficienti, **x** è il vettore delle n incognite e **b** è il vettore degli n termini noti.
Un sistema lineare ammette una ed una sola soluzione se e solo se è verificata una delle seguenti proprietà equivalenti:

- il determinante di A è diverso da zero;
- il rango di A è uguale a n;
- il sistema omogeneo A**x**=0 ammette la sola soluzione banale, ovvero $x_i=0$ con i=1,2,...,n.

Lo scopo di questo paragrafo è quello di testare i metodi diretti per la risoluzione di sistemi lineari descritti nel paragrafo precedente. Si consideri una matrici random A di dimensione n costruita in matlab nel seguente modo:

A=rand(n)

il vettore delle soluzioni è noto ed imposto pari a :

e=ones(n,1)

si calcola così il vettore dei termini noti attraverso il prodotto:

b=A*e

A questo punto si procede alla risoluzione del sistema, con i metodi di risoluzione descritti, e si confronta la soluzione ottenuta rispetto alla soluzione vera calcolando e plottando l'errore commesso dall'algoritmo al variare della dimensione n della matrice. L'errore sul calcolo del sistema lineare è stato calcolato con la norma della differenza tra il vettore soluzione calcolato e quello dato.

L'algoritmo di Gauss opera la fattorizzazione A=LU, cioè trasforma la matrice d'origine nel prodotto di due matrici triangolari. Quindi il sistema diventa:

$$LU\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

ponedo Ux=y, si ottengono due sistemi triangolari facilmente risolvibili in cascata

$$L y=\mathbf{b}$$
$$U\mathbf{x}=y$$

L'algoritmo di Gauss viene risolto direttamente in matlab attraverso l'operatore \

>> **x**=A**b**

La fattorizzazione A=QR trasforma la matrice d'origine nel prodotto di due matrici Q ed R,dove Q è una matrice ortogonale ed R è una matrice triangolare superiore, entrambe delle stesse dimensioni di A. Il sistema in questo caso diventa:

$$QR\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

ponendo Rx=y, il sistema è facilmente risolvibile in cascata:

$$Q y=\mathbf{b}$$
$$R\mathbf{x}=y$$

Per risolvere un sistema lineare mediante la fattorizzazione QR in matlab si impongono i seguenti comandi:

```
>> [QR]=qr(A)
>> y=Q\b
>> x=R\y
```

L'analisi è stata effettuata mediante Matlab impiegando il seguente script:

```
close all

clear all
clc

n1=7
n2=70

for i=n1:1:n2


% Costruzione della matrice nota
A=rand(i);
e=ones(i,1);
b=A*e;

% Soluzione del sistema impiegando il metodo di Gauss

x1=A\b;                    % Soluzione del sistema

err1(i-n1+1)=norm(x1-e);  % Errore sul calcolo del sistema lineare

% Soluzione del sistema mediante la fattorizzazione QR

[Q,R]=qr(A);
y=Q\b;
x2=R\y;
err2(i-n1+1)=norm(x2-e);  % Errore sul calcolo del sistema lineare

%Numero di condizionamento della matrice

C(i-n1+1)=cond(A);  % Numero di condizionamento

end
figure
plot(err1,'*')
title('Errore con il metodo di Gauss')
grid on

figure
plot(err2,'s')
title('Errore con la fattorizzazione QR')
grid on

figure
plot(C,'r')
title('Numero di condizionamento')
grid on
```

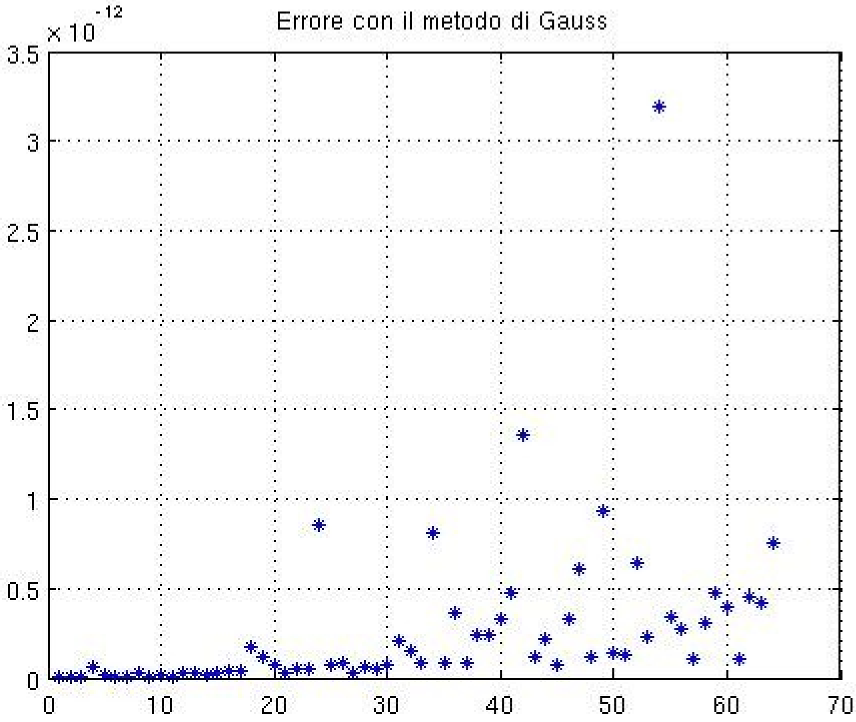


Fig 1 – Errore ottenuto con il metodo di Gauss

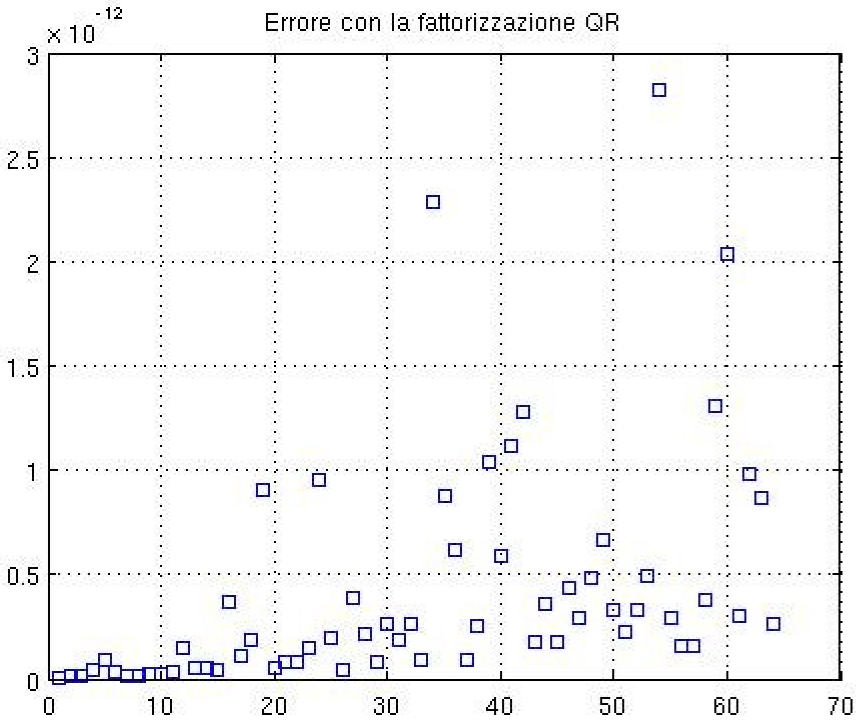


Fig 2 – Errore ottenuto con la fattorizzaizone QR

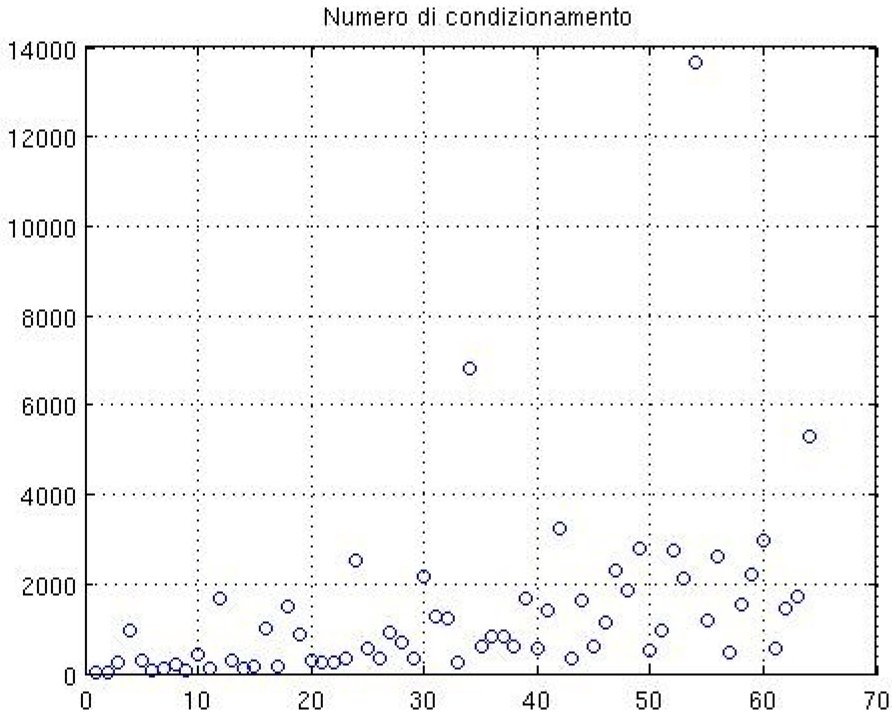


Fig 3 – Andamento del numero di condizionamento

RISOLUZIONE AGLI ELEMENTI FINITI DI UNA STRUTTURA DISCRETIZZATA CON ELEMENTI TRAVE ALLA KIRCHHOFF.

ELEMENTI FINITI DI TRAVE (*elementi flessionali di Kirchhoff*)

Il metodo delle rigidezze è valido qualunque sia il tipo di elemento utilizzato. Si analizza nel seguito la procedura per costruire la matrice delle rigidezze $[K]$ dell'elemento.

Si suppone valida la relazione $\{F\}=[K]\cdot\{U\}$, dove $\{F\}$ è il vettore delle forze nodali e $\{U\}$ il vettore degli spostamenti.

L'elemento flessionale di Kirchhoff (trave) è caratterizzato da due nodi e ad ogni nodo sono associati due gradi di libertà (spostamenti nodali): lo spostamento trasversale del nodo 1 e del nodo 2 (U_1, U_3) e la rotazione del nodo 1 e del nodo 2 (U_2, U_4); si suppone dapprima di trascurare nell'analisi le deformazioni assiali.

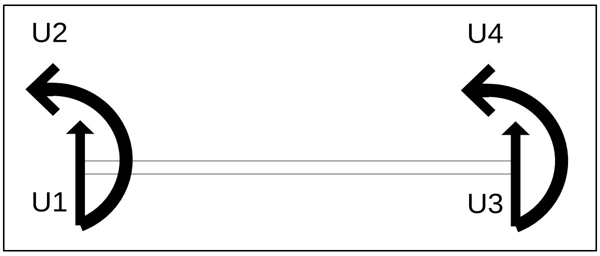


Fig 4 – Elemento flessionale di Kirchhoff

La matrice di rigidezza dell'elemento è quindi una matrice quadrata di ordine 4.

Per definire la matrice di rigidezza K si parte dalla scelta di un'opportuna *funzione di spostamento* che consenta di definire in ogni punto lo stato di spostamento in funzione degli spostamenti nodali; tale funzione può quindi essere un'espressione polinomiale del 3° ordine (4 cofficienti) tale che lo stato di spostamento in ogni punto di coordinate (x,y) sia definito da

$$\{\delta(x,y)\}=[f(x,y)]\cdot\{\alpha\}$$

dove $\{\alpha\}$ è il vettore colonna dei coefficienti incogniti della funzione polinomiale $[f(x,y)]$ e $\{\delta(x,y)\}$ è definito attraverso le componenti di spostamento *w* e rotazione . θ

Per l'ipotesi di Kirchhoff la rotazione θ è pari alla derivata di *w* quindi se

$$w=\alpha_1+\alpha_2\cdot x+\alpha_3\cdot x^2+\alpha_4\cdot x^3$$

vale la seguente espressione per θ

$$\theta=w'=\alpha_2+2\cdot\alpha_3\cdot x+3\cdot\alpha_4\cdot x^2$$

Per legare lo stato di spostamento in un generico punto al vettore degli spostamenti nodali è sufficiente porre

$$w(0) = U_1$$

$$w'(0) = U_2$$

$$w(L) = U_3$$

$$w'(L) = U_4$$

Risulta quindi

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2\mathrm{L} & 3\mathrm{L}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

che possiamo scrivere in modo sintetico come

$$\{U\} = [A] \cdot \{\alpha\}$$

Risulta

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \cdot \{U\}$$

e quindi

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)] \cdot [A]^{-1} \cdot \{U\} = [N] \cdot \{U\}$$

dove le funzioni di forma sono

$$N_1(x) = 1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3}$$

$$N_2(x) = x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$N_3(x) = \frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3}$$

$$N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

Definendo la relazione tra carichi nodali e spostamenti nodali si ricava la matrice di rigidezza dell’elemento. Per far questo si utilizza il *principio dei lavori virtuali* nella formulazione degli *spostamenti virtuali* in base al quale il lavoro che le forze esterne compiono per effetto degli spostamenti virtuali applicati (spostamenti piccoli e congruenti coi vincoli) uguaglia il lavoro interno compiuto dagli sforzi interni reali per le deformazioni virtuali. Il lavoro compiuto dalle forze esterne per effetto degli spostamenti virtuali è

$$W_{ext} = \{\delta^*\}^T \cdot \{F\}$$

Il lavoro compiuto dagli sforzi interni reali per le deformazioni virtuali è

$$W_{\text{int}} = \int \{\varepsilon(x, y)^*\}^T \cdot \{\sigma(x, y)\} dV$$

Le deformazioni in ogni punto dell'elemento sono legate agli spostamenti nodali dalla relazione

$$\{\varepsilon(x,y)\}=[B]\cdot\{U\}$$

dove per ottenere [B] occorre legare la deformazione in ogni punto allo spostamento in ogni punto. Nel caso semplice di trave flessionale, la deformazione è la derivata seconda del vettore spostamento *w* quindi si ricava una forma semplice di [B]

$$[B]=\left[\left(\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right)\left(\frac{4}{L}-\frac{6x}{L^2}\right)\left(\frac{-6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\right)\left(\frac{2}{L}-\frac{6x}{L^2}\right)\right]$$

Gli sforzi sono legati agli spostamenti nodali dalla relazione

$$\{\sigma(x,y)\}=[D]\cdot[B]\cdot\{U\}$$

per ottenere la quale si sono legati gli sforzi interni alla deformazione tramite la matrice di elasticità

$$[D]=[E\cdot I]$$

Sostituendo le espressioni suddette nell'espressione del lavoro interno e uguagliando il lavoro interno al lavoro esterno si ottiene il legame tra carichi nodali e spostamenti nodali

$$\{F\}=\left[\int[B]^T\cdot[D]\cdot[B]dV\right]\cdot\{U\}$$

dove

$$\left[\int[B]^T\cdot[D]\cdot[B]dV\right]=[K]$$

Nel caso dell'elemento flessionale di Kirchhoff risulta

$$K=\begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{Bmatrix} = \int_0^L E\cdot I \begin{Bmatrix} N1'' \\ N2'' \\ N3'' \\ N4'' \end{Bmatrix}\{N1''\ \ N2''\ \ N3''\ \ N4''\}dx \quad =$$

$$=\begin{Bmatrix} \int_0^L EI(N_1'')^2dx & \int_0^L EI(N_1'')(N_2'')dx & \int_0^L EI(N_1'')(N_3'')dx & \int_0^L EI(N_1'')(N_4'')dx \\ SYM & \int_0^L EI(N_2'')^2dx & \int_0^L EI(N_2'')(N_3'')dx & \int_0^L EI(N_2'')(N_4'')dx \\ SYM & SYM & \int_0^L EI(N_3'')^2dx & \int_0^L EI(N_3'')(N_4'')dx \\ SYM & SYM & SYM & \int_0^L EI(N_4'')^2dx \end{Bmatrix}$$

che se I (momento di inerzia della trave) è costante si riduce alla semplice forma

$$K=\frac{EI}{L^3}\cdot\begin{Bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ SYM & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ SYM & SYM & 12 & -6L \\ SYM & SYM & SYM & 4L^2 \end{Bmatrix}$$

Se la trave è inclinata rispetto al sistema di riferimento della struttura considerata occorre operare un cambiamento di assi, la qual cosa si traduce nell'applicazione al vettore degli spostamenti, delle forze e alla matrice di rigidezza della matrice di trasformazione

$$[T]=\begin{bmatrix} c\theta & s\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c\theta & s\theta \end{bmatrix}$$

dove □ è l'angolo formato tra la trave e l'asse x del sistema di riferimento.

Se si considerano oltre gli spostamenti trasversali e le rotazioni anche gli <u>spostamenti assiali</u>, il vettore degli spostamenti e la matrice di rigidezza dell'elemento nel sistema di riferimento locale sono:

$$U=\begin{Bmatrix} Ui \\ Vi \\ \theta i \\ Uj \\ Vj \\ \theta j \end{Bmatrix} \qquad [K]=\begin{Bmatrix} K & 0 & 0 & -K & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} & 0 & K_{13} & K_{14} \\ 0 & K_{21} & K_{22} & 0 & K_{23} & K_{24} \\ -K & 0 & 0 & K & 0 & 0 \\ 0 & K_{31} & K_{32} & 0 & K_{33} & K_{34} \\ 0 & K_{41} & K_{42} & 0 & K_{43} & K_{44} \end{Bmatrix}$$

dove

$$K=\frac{E\cdot A}{L}$$

La relazione $\{F\}=[K]\cdot\{U\}$ vale nel caso di sola azione dei carichi nodali. Nel caso più generale di ulteriori azioni esterne agenti la soluzione elastica dell'elemento può essere ottenuta applicando il *Principio dei Lavori Virtuali* nella versione degli S*postamenti Virtuali* che porta alla relazione forze/spostamenti seguente:

$$\{F\}+\{F_P\}+\{F_Q\}+\{F_T\}+\{M_C\}=[K]\cdot\{U\}$$

Dove $\{F\}$ è il vettore dei carichi nodali, $\{F_P\}$ il vettore dei carichi concentrati *P* trasformati in carichi nodali equivalenti, $\{F_Q\}$ il vettore dei carichi distribuiti *q(x)* trasformati in carichi nodali equivalenti, $\{F_T\}$ il vettore dei carichi equivalenti termici, $\{M_C\}$ il vettore delle coppie concentrate equivalenti.

Si può dimostrare che

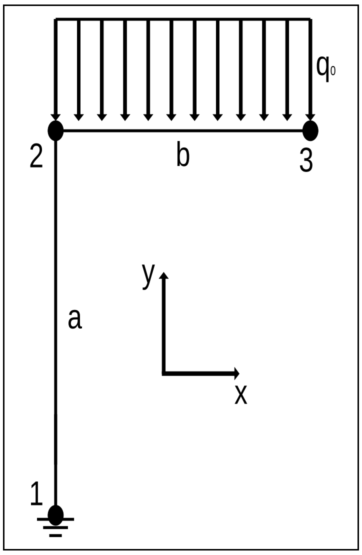
$$\{F_P\} = P \cdot \begin{Bmatrix} N_1(a) \\ N_2(a) \\ N_3(a) \\ N_4(a) \end{Bmatrix} \qquad \{F_Q\} = \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} \cdot q(x)\, dx$$

$$\{F_T\} = \int_0^L E \cdot I \cdot \alpha \cdot \frac{\Delta T}{b} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} \cdot q(x)\, dx \qquad \{M_C\} = C \cdot \begin{Bmatrix} N_1'(a) \\ N_2'(a) \\ N_3'(a) \\ N_4'(a) \end{Bmatrix}$$

dove a è il punto di applicazione della forza o della coppia concentrata.

Se una struttura è costituita da più di un elemento trave, occorre analizzare le singole travi e combinare i vettori dei carichi nodali, degli spostamenti nodali e delle matrici di rigidezza delle singole travi a formare i corrispettivi vettori e matrici della struttura globale. Assemblate le matrici e i vettori occorre imporre le condizioni di vincolo.

Esempio di struttura analizzata con elementi trave alla Kirchhoff



Struttura caricata con carico distribuito q_0

Fig 5 – Struttura caricata con carico distribuito q_0

Geometria travi

Trave	Nodi	Inclinazione θ	Lunghezza L [mm]	Diametro d [mm]	Sezione A	Momento di Inerzia I [mm^4]
a	1-2	90°	1000	50	1963.495	306796.157
b	2-3	0°	1000	50	1963.495	306796.157

Proprietà del materiale

E = 70 GPa

Carichi e vincoli

Carico distribuito $q_0 = 1\ N/mm = 10^3\ N/m$

$$U_{1X}=0$$
$$U_{1Y}=0$$
$$\theta_{1XY}=0$$

Matrici della struttura

Vettore spostamenti associato alla struttura

$$\{U\} = \begin{bmatrix} U_{1X} \\ U_{1Y} \\ \theta_{1XY} \\ U_{2X} \\ U_{2Y} \\ \theta_{2XY} \\ U_{3X} \\ U_{3Y} \\ \theta_{3XY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{2X} \\ U_{2Y} \\ \theta_{2XY} \\ U_{3X} \\ U_{3Y} \\ \vartheta_{3XY} \end{bmatrix}$$

I primi 3 elementi del vettore sono nulli in quanto essi rappresentano le condizioni di vincolo all'incastro 1.

Vettore carichi associato alla struttura

$$\{F_Q\} = \begin{bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ C_1 \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ C_2 \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \\ C_3 \end{bmatrix} = q_0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{12} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \\ 83.333 \\ 0 \\ 500 \\ -83.333 \end{bmatrix} \quad [N]$$

Dalla combinazione delle matrici di rigidezza delle singole travi si ottiene la matrice di rigidezza dell'intera struttura

$$[K] = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & -K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} & 0 & K_{13} & K_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{21} & K_{22} & 0 & K_{23} & K_{24} & 0 & 0 & 0 \\ -K & 0 & 0 & K+K_{11} & 0 & K_{12} & K_{13} & 0 & K_{14} \\ 0 & K_{31} & K_{32} & 0 & K_{33}+K & K_{34} & 0 & -K & 0 \\ 0 & K_{41} & K_{42} & K_{21} & K_{43} & K_{44}+K_{22} & K_{23} & 0 & K_{24} \\ 0 & 0 & 0 & K_{31} & 0 & K_{32} & K_{33} & 0 & K_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K & 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{41} & 0 & K_{42} & K_{43} & 0 & K_{44} \end{bmatrix} =$$

$$
= E \cdot I \cdot \begin{bmatrix} 6400 & 0 & 0 & -6400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 & -12 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -6400 & 0 & 0 & -6388 & 0 & -6 & -12 & 0 & -6 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 6412 & 6 & 0 & -6400 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & -6 & 6 & 8 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & 6 & 12 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6400 & 0 & 0 & 6400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 2 & 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}
$$

Dato che i vincoli U_{1x} U_{1y} $\square_{1xy}$ sono nulli si possono eliminare dal sistema le prime 3 righe e le prime 3 colonne della matrice di rigidezza e le prime 3 righe del vettore degli spostamenti e del vettore dei carichi.

Il sistema si riduce così a un sistema 6*6.

$$
= E \cdot I \cdot \begin{bmatrix} -6388 & 0 & -6 & -12 & 0 & -6 \\ 0 & 6412 & 6 & 0 & -6400 & 0 \\ -6 & 6 & 8 & 6 & 0 & 2 \\ -12 & 0 & 6 & 12 & 0 & 6 \\ 0 & -6400 & 0 & 0 & 6400 & 0 \\ -6 & 0 & 2 & 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}
$$

Risoluzione del sistema in matlab

```
E=70*10^9;                  %Modulo elastico [Pa]
I=306796.157*10^-12;        %Momento di Inerzia [m^4]

% Matrice di Rigidezza

A=E*I*[-6388 0 -6 -12 0 -6;
    0 6412 6 0 -6400 0;
    -6 6 8 6 0 2;
    -12 0 6 12 0 6;
    0 -6400 0 0 6400 0;
    -6 0 2 6 0 4];

%Termine Noto
b=[0;500;83.333;0;500;-83.333];

%Soluzione del sistema con il metodo di Gauss
x1=A\b

% Soluzione del sistema mediante la fattorizzazione QR
```

```
[Q,R]=qr(A);
y=Q\b;
x2=R\y
```

Soluzioni del sistema mediante:

Il Metodo di Gauss	**La fattorizzazione QR**
x1 =	x2=
-0.00000000000000	0.00000000000000
0.01552139638407	0.01552139638406
-0.02328209457610	-0.02328209457609
0.02522226136341	0.02522226136340
0.01552503421134	0.01552503421134
-0.02716242815072	-0.02716242815071