UNIVERSITA’ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

Corso di laurea triennale in ingegneria elettronica

Tesina corso di calcolo numerico 2

Applicazione delle formule di quadratura per la risoluzione di equazioni integrali

A.A 2006/07

Docente: Studente

Prof. G. Rodriguez Nicola Murgia

Introduzione

Spesso in elettromagnetismo e nelle altre scienze applicate si incontrano problemi in cui sono coinvolti operazioni di integrazione,la cui risoluzione è semplice solo nei casi in cui è nota la primitiva.
Talvolta il problema è ancora più complicato, in cui la soluzione di una particolare equazione compare come un integrando, relazionato ad altre grandezze caratteristiche del sistema fisico studiato,in tal caso si parla di equazione integrale.

In questo elaborato cerco di risolvere un'equazione molto famosa dell'elettromagnetismo, l'equazione di Hallén che appartiene alla classe di equazioni integrali di Fredholm di prima specie, attraverso metodi numerici, confrontando successivamente il risultato con la soluzione analitica ottenuta con qualche approssimazione.

Equazioni integrali

I problemi integrali di Fredholm di prima specie hanno la forma seguente:

$$\int_a^b K(x,t) f(t) = g(x)$$

Dove f(t) è la funzione incognita definita nell'intervallo [a ,b] , g(x) è una funzione nota, e K(x,t) altrettanto noto è detto nucleo dell'integrale.
La difficoltà in questo tipo di problema sta nell'impossibilità teorica di poter isolare la funzione incognita dalle altre grandezze.
Una strategia di soluzione consiste nel provare ad imporre la forma della funzione incognita, e data la linearità dell'operatore integrale scriverla come sovrapposizione di alcune funzioni di base

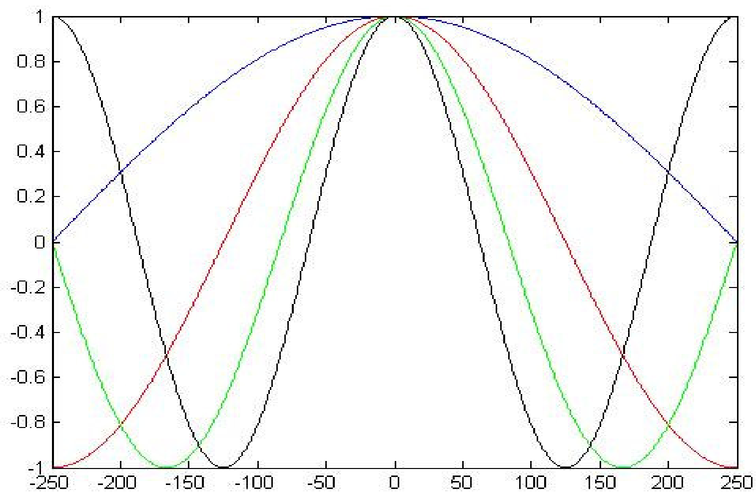
$$f(t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j B_j(t)$$

Una rappresentazione opportuna poterebbe essere fornita anche da alcune informazioni a priori sul problema in studio, per esempio in questo caso il generatore di tensione è di tipo sinusoidale,quindi potremmo aspettarci una curva di questo tipo.

SCELTA DELLE FUNZIONI BASE

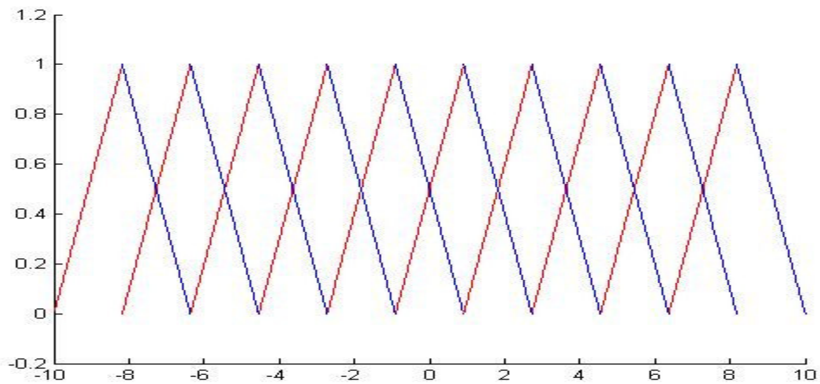
Funzioni a dominio intero

In questo caso le funzioni di espansione sono definite sull'intero dominio.
Associando gli opportuni coefficienti a ciascuna funzione, e sommandole si ottiene la soluzione.
Come esempio possono essere prese le funzioni trigonometriche con diversa frequenza, o un'altra classe di funzioni ortogonali.



Funzioni a dominio limitato

Nel caso di domino limitato, scelta un'opportuna discretizzazione $S = \{a=x_0 < x_1 < \ldots < x_n=b\}$ del dominio, ogni funzione base è definita diversa da zero solo in alcuni intervalli individuati dalla discretizzazione.
La soluzione completa è ottenuta sommando algebricamente tutte le funzioni base.
Una classe di funzioni che si adattano al problema possono essere dei triangoli isosceli, ognuno dei quali definito su due intervalli adiacenti.
Nel primo si ha una retta crescente che va da zero a uno, nel secondo una decrescente che va da uno a zero.
Negli intervalli estremi si mette solo mezzo triangolo, definito su un solo intervallino, altrimenti nel caso di condizioni al contorno nulle, $f(a) = f(b) = 0$, non se ne mette.
In questo modo in ogni nodo la funzione completa assume il valore del vertice del triangolo, nell'intervallo tra due nodi la funzione è una retta che li unisce.



La possibilità di usare una funzione segmentata è data dal fatto che non ho interesse ad avere derivata prima continua, in caso contrario si sarebbero dovuti usare polinomi di grado superiore imponendo la continuità della derivata.

SVILUPPO DELL' EQUAZIONE

Nota la forma delle funzioni scelte il problema è ricondotto alla determinazione dei coefficienti di proporzionalità di ciascuna funzione di base
Dunque scelte N funzioni di base devo determinare i coefficienti α_j , $\quad j = 1,\ldots,N$
Dato che l' equazione dovrebbe valere per ogni x, un possibile metodo potrebbe essere quello di effettuare delle valutazioni sulla g(x) in diversi punti, gli integrali diventano dei coefficienti numerici, il problema si trasforma in un sistema lineare.
Per avere l'unicità della soluzione occorre fare almeno N valutazioni in modo che il sistema non sia sottodeterminato. Possono essere anche fatte più valutazioni, e ottenere teoricamente una migliore approssimazione.
In questo caso il sistema dovrà essere risolto col metodo dei minimi quadrati.

Il problema si trasforma nel seguente:

$$f(t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j H_j(t) \qquad \int_a^b K(x,t) \sum_{j=1}^{N} \alpha_j H_j(t) = g(x) \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \underbrace{\int_a^b K(x,t) H_j(t) dt}_{\phi_j} = g(x)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & \cdots & \cdots & \phi_{N1} \\ \phi_{21} & \ddots & & \phi_{N2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \phi_{NN} \\ \vdots & & & \vdots \\ \phi_{M1} & \cdots & \cdots & \phi_{NM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \\ \\ \\ g(x_M) \end{bmatrix}$$

Il vettore $\boldsymbol{\alpha}$ è la soluzione, e fornisce i coefficienti per ciascuna funzione base.

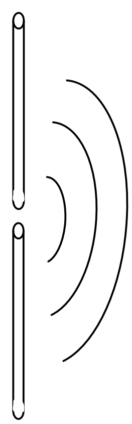
Equazione di Hallén

Un'antenna è una struttura metallica con basse perdite che irradia campo elettromagnetico in maniera efficiente.
L'equazione di Hallén lega la distribuzione di corrente in un'antenna filiforme (antenna cilindrica con il raggio della base piccolo rispetto alla lunghezza) con il potenziale elettromagnetico generato della stessa.

Ha la forma seguente:

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\exp(-jkR)}{R}I(z')dz' = C\cos(kz) - j\frac{Vgk}{2\omega}sen(k|z|)$$

$R = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$
a è il raggio della base dell'antenna
l è la semilunghezza dell'antenna
z e z' sono le ascisse dove calcolo rispettivamente la corrente e il potenziale elettromagnetico
$I(z')$ è la corrente elettrica che scorre nella superficie laterale dell'antenna
C è una costante che si ottiene imponendo la condizione al contorno $I(\pm l) = 0$
μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto, vale $10^{-4}\,H/mm$
k è il numero d'onda

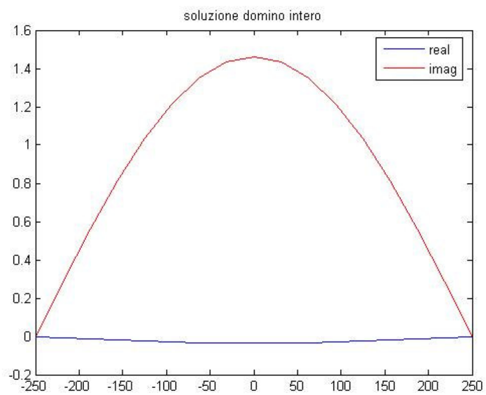


Tale equazione è ottenuta facendo l'approssimazione che la corrente sia concentrata sull'asse di simmetria dell'antenna (in realtà giace nella superficie), in questo modo il kernel dell'integrale è sempre non singolare, $R \neq 0$ per $\forall z, z'$.

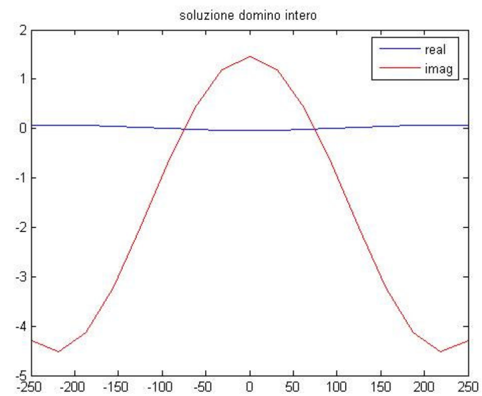
Implementazione matlab funzioni a dominio intero trigonometriche

Scelgo funzioni trigonometriche pari, per la simmetria dell'antenna filiforme, ottenendo

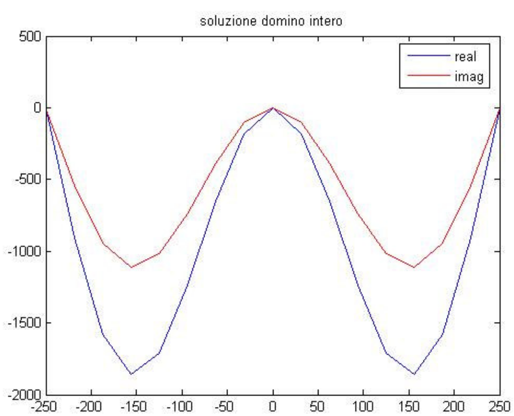
$$f(t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cos(j\beta t) \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \int_{-l}^{l} K(x,t)\cos(j\beta t) = g(x) \qquad \phi_{ij} = \int_{-l}^{l} K(x_i,t)\cos(j\beta t)$$



Una funzione base



Due funzioni base

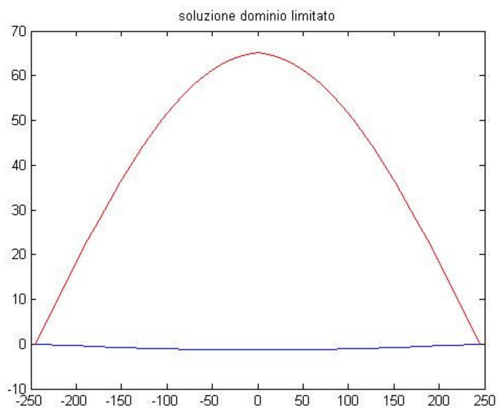


Tre funzioni base

La matrice del sistema è molto mal condizionata, si ottiene la soluzione corretta solo nel primo caso, aumentando le funzioni di espansione della soluzione la precisione crolla significativamente.

Implementazione matlab funzioni a dominio limitato

$$f(z) = \sum_j \alpha_j \Lambda_j \qquad \Lambda_j = \begin{cases} \dfrac{1 - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} & \text{per} \quad z \in [z_{j-1}, z_j] \\[2ex] \dfrac{1 - z_{j+1}}{z_{j+1} - z_j} & \text{per} \quad z \in [z_{j-1}, z_j] \\[2ex] 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



L’andamento sembra simile al caso precedente, ma l’ampiezza è notevolmente elevata.
Anche in questo caso si può pensare che l’errore sia causato dal condizionamento del sistema.

Sviluppo analitico dell’equazione di Hallén

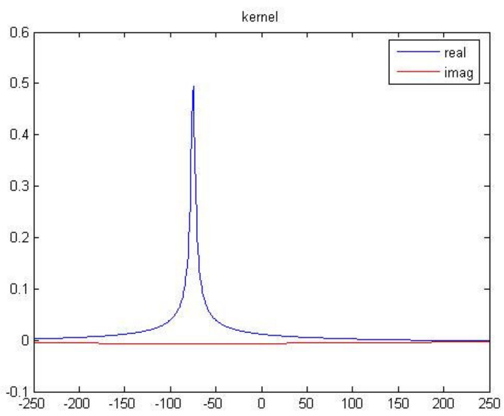
A rigore l’equazione non ammette soluzioni integrabili per la corrente I(z’): al primo membro, diversamente dal secondo, compare una funzione analitica. Ciò si deve alla supposta concentrazione della corrente sull’asse dell’antenna che ha eliminato la singolarità del kernel.
Da un punto di vista pratico il problema viene trasformato in un’equazione integrale di Fredholm di seconda specie e risolta per iterazioni successive.

La funzione che moltiplica I(z’) nell’integrale è rapidamente variabile nell’intorno di z’=z se a->0 (antenna sottile). Per operare con funzioni più “dolci” conviene trasformare l’integrale come segue

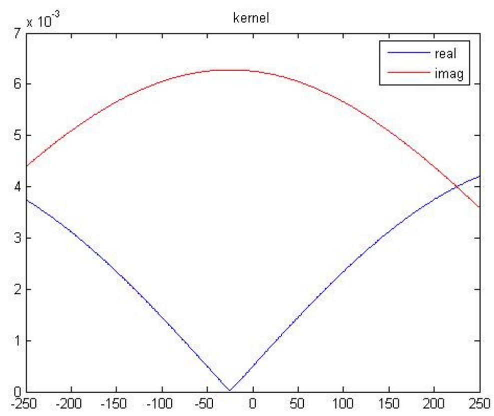
$$\int_{-l}^{l} I(z\cdot)\frac{\exp(-jk\sqrt{a^2+(z-z')^2})}{\sqrt{a^2+(z-z')^2}}dz' = \int_{-l}^{l}\frac{I(z')}{\sqrt{a^2+(z-z')^2}}dz' - \int_{-l}^{l} g(z,z')I(z')dz'$$

$$g(z,z') = \frac{1-\exp(-jk\sqrt{a^2+(z-z')^2})}{\sqrt{a^2+(z-z')^2}} =$$

$$= jk\exp\left(-jk\frac{\sqrt{a^2+(z-z')^2}}{2}\right)\frac{\sin\left(k\frac{\sqrt{a^2+(z-z')^2}}{2}\right)}{k\frac{\sqrt{a^2+(z-z')^2}}{2}}$$



kernel iniziale



kernel modificato

Il primo integrale può essere approssimato in base al fatto che a (il raggio dell'antenna) è piccolo, l'integrando presenta un picco per z=z'; è quindi l'intorno di z=z' che fornisce il massimo contributo all'integrale stesso.
Di conseguenza

$$\int_{-l}^{l} \frac{I(z')}{\sqrt{a^2+(z-z')^2}}\,dz' \approx I(z)\int_{-l}^{l} \frac{dz'}{\sqrt{a^2+(z-z')^2}}$$

Con il cambio di variabile $|z-z'|=u$ e ricordando che $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln(u+\sqrt{u^2+a^2})$,

l'integrale si trasforma come segue:

$$f(z) = \int_{-l}^{l} \frac{dz'}{\sqrt{a^2+(z-z')^2}} = -\int_{z+l}^{0} \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} + \int_{0}^{l-z} \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} =$$

$$= \ln\frac{(l+z)+\sqrt{(l+z)^2+a^2}}{a} + \ln\frac{(l-z)+\sqrt{(l-z)^2+a^2}}{a}$$

La funzione $f(z)$ è pari, e per $z=0$ assume il valore

$$f(0) = 2\ln\frac{l+\sqrt{l^2+a^2}}{a} \approx 2\ln\frac{2l}{a} = \Omega$$

e per $z=\pm l$ si ha

$$f(\pm l) = \ln\frac{2l+\sqrt{4l^2+a^2}}{a} \approx \ln\frac{4l}{a}$$

La funzione è molto piatta nell'intorno di $z=0$, come si vede dallo sviluppo in serie

$f(z) \approx \Omega - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z}{l}\right)^{2n}$,avendo posto $a=0$ nel calcolo delle derivate. Se si approssima la $f(z)$ a Ω
In tutto l'intervallo delle z, l'equazione può essere scritta come segue:

$$I(z) = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{4\pi C}{\mu}\cos(kz) - j\frac{2\pi Vg}{\zeta}\sin(k|z|)\right) + \frac{1}{\Omega}\int_{-l}^{l} g(z,z')I(z')dz' \ ,$$

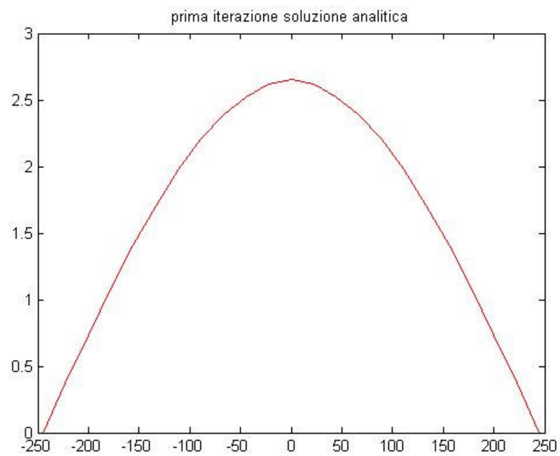
equazione integrale non omogenea (funzione nota al secondo membro) di seconda specie (la funzione incognita appare sia fuori che dentro il segno di integrale). Essa è risolvibile per iterazioni successive; come prima iterazione si può prendere

$$I(z) = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{4\pi C}{\mu}\cos(kz) - j\frac{2\pi Vg}{\zeta}\sin(k|z|)\right),$$

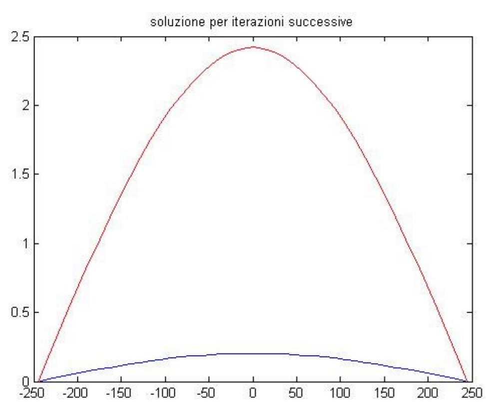
che è di ordine 1/Ω. Sostituendo nell'integrale, si avrebbe la seconda iterazione, contenente anche un termine di ordine $1/\Omega^2$; e così via. Fermandosi alla prima iterazione, per Ω molto >> 1 e imponendo la condizione al contorno $I(\pm l) = 0$, si ha

$C = j\dfrac{\mu V g}{2\zeta}\dfrac{\sin(kl)}{\cos(kl)}$, e di conseguenza

$$I(z) \approx j\frac{2\pi V g}{\zeta\Omega}\left(\frac{\sin(kl)}{\cos(kl)}\cos(kz) - \sin(k|z|)\right)$$



Sviluppando in matlab



In questo caso il problema converge dopo poche iterazioni, la soluzione non è uguale al primo caso, infatti l'ampiezza è circa il doppio, ma c'è da considerare che abbiamo cambiato il modello del problema.

Considerazioni finali

Nei primi due casi il condizionamento del problema è molto elevato, pertanto era difficile aspettarsi una soluzione corretta, in compenso abbiamo ottenuto una forma della soluzione più o meno simile, a parte l'ampiezza che si discosta molto.
Abbiamo visto che in tutti e tre i casi la corrente assume andamento sinusoidale, con parte immaginaria predominante, questo è il risultato che ci si aspettava.
Infatti un'antenna filiforme può essere considerata come una linea di trasmissione aperta alle estremità e piegata, dove la corrente ha proprio questa forma.
Il modello di Hallén va bene per sapere la forma della corrente, ma non considera che l'antenna sta effettivamente irradiando campo elettromagnetico, per questo motivo i calcoli dell'impedenza di ingresso si discostano molto dal valore reale che si aggira intorno ai 73 Ohm.
In effetti ai fini energetici è sufficiente solo la conoscenza di quest'ultima, lasciando la forma esatta della corrente alla sola determinazione della forma del campo nello spazio circostante.
Per i calcoli dell'impedenza di ingresso vengono usati dei modelli più accurati che considerano il sistema antenna come un risuonatore.

Bibliografia

[1] **Prof. G. Rodiruez** "Dispense calcolo numerico"

[2] **Prof. A. G. Casula** "Dispense antenne"

[3] **G. Franceschetti** "Campi elettromagnetici"