Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
14 luglio 2025

1. Si risolva il sistema lineare

$$\begin{cases} x_2 + 7x_3 + 7x_4 = -6 \\ x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_4 = 1 \end{cases}$$

mediante la fattorizzazione $PA = LU$ e si calcoli il determinante della matrice dei coefficienti A.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/4 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & -12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 27/4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -486, \quad \mathbf{x} = (2, 1, 0, -1)^T.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α il sistema ammette un'unica soluzione e per quali la matrice A é simmetrica definita positiva. Si studi, al variare del parametro α, la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Si fissi $\alpha = 2$ e si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\alpha \neq \pm 1$, simmetrica per ogni valore di α, definita positiva per $\alpha > 1$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $\alpha < -1$ o $\alpha > 1$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/2, 1/2, 1/2]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [-1/4, 3/4, 1/2]^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = -2xyy', \quad x \in [1/2, 5], \\ y(1/2) = 0, \ y'(1/2) = 1, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 2$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{1}{2}, 1)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (1, \frac{1}{2})^T$. $\boldsymbol{\eta}_3 = (\frac{5}{4}, -\frac{1}{4})^T$.

4. Risolvere la seguente equazione differenziale mediante la serie di Fourier

$$y'' - 2y = \begin{cases} 1, & -4 \leq x < -1, \\ 3, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 4. \end{cases}$$

Dire infine se il termine noto è differenziabile termine a termine.

Soluzione.

$$y(x) = -\frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{64}{(8 + k^2\pi^2)k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{4}\right).$$

Il termine noto è differenziabile termine a termine.

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-5y' + y = [H(x+2) - H(x-3)], \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{5}(x+2)} - \mathrm{e}^{\frac{1}{5}(x-3)}, & x < -2, \\ 1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{5}(x-3)}, & -2 \leq x < 3, \\ 0, & x \geq 3. \end{cases}$$