Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

30 giugno 2025

1. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 9 & 18 & 4 \\ 9 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

e la si utilizzi per determinare il suo determinante e la soluzione del sistame $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{b} = (6, 13, 13)^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4/9 & 4/9 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 9 & 18 & 4 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 2/9 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -18, \quad \mathbf{x} = (1, 0, 1)^T.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 4\beta & 2\beta & \beta \\ 2\beta & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori di β la matrice A è invertibile. Si studi al variare di β la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Posto $\beta = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [1\ 0\ 1]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\beta \neq 0, 4/5$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $-4/5 < \beta < 4/5$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = (0, -2, 0)^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = (5/4, 0, 1)^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{y' - y}{4x}, \quad x \in [1, 5], \\ y(1) = 0, \ y'(1) = 1, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 2$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{9}{8})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{17}{16}, \frac{113}{96})^T$.

4. Scrivere la serie di Fourier, della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 6(1 + \frac{x}{5}), & -5 \leq x < 0, \\ 6(1 - \frac{x}{5}), & 0 \leq x < 5, \\ f(x+10), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dire infine se la serie è differenziabile termine a termine.

Soluzione.

$$y(x) = 3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{12(1-(-1)^k)}{k^2\pi^2} \cos\left(\frac{k\pi x}{5}\right).$$

La serie è differenziabile termine a termine.

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-2y'' + 4y = \mathrm{e}^{3x} H(-x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{3\sqrt{2}+2}{56}\mathrm{e}^{\sqrt{2}x} - \dfrac{1}{14}\mathrm{e}^{3x}, & x \leq 0, \\ \dfrac{3\sqrt{2}-2}{56}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}x}, & x > 0. \end{cases}$$