Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

15 gennaio 2025

1. Si risolva mediante la fattorizzatione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 13 \\ 8x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -8 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 0 \\ 4x_1 + 10x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$$

Si calcoli inoltre, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice dei coefficienti del sistema.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 8 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -4096, \quad \mathbf{x} = [0, 1, 2, -1]^T.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ a & 2 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro a il sistema ammette un'unica soluzione, per quali valori la matrice è simmetrica e per quali ha autovalori reali positivi. Si studi inoltre, al variare del parametro a, la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Si fissi $a = 1$ e si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $a \neq 2$, è simmetrica per $a = 1$, ha autovalori positivi se $0 \leq a < 2$. Il metodo di Jacobi converge per $-2 < a < 2$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [5/2, 5/4, 11/8]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [19/8, 5/8, 27/16]^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = y - 3xy', & x \in \left[\frac{1}{3}, 3\right] \\ y(\frac{1}{3}) = 1, y'(\frac{1}{3}) = 2 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{3}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 1$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{5}{3}, \frac{5}{3})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{20}{9}, \frac{10}{9})^T$.

4. Sviluppare in serie di Fourier, la seguente funzione e stabilire se questa è differenziabile termine a termine

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & -2 \leq x < 0, \\ 3 + x, & 0 \leq x < 2. \end{cases}$$

Soluzione.

$$S_f(x) = 4 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2 \pi^2} \cos\left(\frac{k\pi}{2} x\right)$$

e questa è differenziabile termine a termine.

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-5y' + y = H(x + 4) - H(x + 3), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{5}x}(\mathrm{e}^{\frac{4}{5}} - \mathrm{e}^{\frac{3}{5}}), & x < -4, \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{5}x}(\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}} - \mathrm{e}^{\frac{3}{5}}), & x \in [-4, -3), \\ 0, & x \geq -3. \end{cases}$$