Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Seconda prova intermedia di Matematica Applicata

15 gennaio 2025

Compito numero 1

1. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\alpha & \frac{1}{6} \\ 0 & \alpha & -2\alpha \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = I - \mathbf{w}\mathbf{w}^{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dove α, β sono parametri reali. Calcolare in modo efficiente il determinante di A e il suo raggio spettrale quando $\beta = 0$, al variare del parametro α. Stabilire per quali valori di α e β la matrice A è l'inversa di B e, fissati tali valori, calcolare l'indice di condizionamento in norma 1. Calcolare la matrice C, stabilire se è ortogonale e calcolarne l'indice di condizionamento in norma 2 e ∞. Si risolva nel modo più conveniente il sistema lineare $Ax = b$ dove $A = BC$ e $b = [1, 0, -1]^T$.

Soluzione. Se $\beta = 0$, $\det(A) = \alpha/2$ e $\rho(A) = 1$ se $|\alpha| < 1$ e $\rho = |\alpha|$ se $|\alpha| \geq 1$. La matrice A è l'inversa di B per $\alpha = 1/3$ e $\beta = 0$. $\mathrm{cond}_1(A) = 55/6$.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{cond}_2(C) = 1, \quad \mathrm{cond}_\infty(C) = 1.$$

La soluzione del sistema è

$$\mathbf{x} = C^T A\mathbf{b} = \left(1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)^T.$$

2. Si risolva mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 13 \\ 8x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -8 \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 0 \\ 4x_1 + 10x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$$

Si calcoli inoltre, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice dei coefficienti del sistema.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 8 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = -4096, \quad \mathbf{x} = [0, 1, 2, -1]^T.$$

3. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ a & 2 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro a il sistema ammette un'unica soluzione, per quali valori la matrice è simmetrica e per quali ha autovalori reali positivi. Si studi inoltre, al variare del parametro a, la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Si fissi $a = 1$ e si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $a \neq 2$, è simmetrica per $a = 1$, ha autovalori positivi se $0 \leq a < 2$. Il metodo di Jacobi converge per $-2 < a < 2$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [5/2, 5/4, 11/8]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [19/8, 5/8, 27/16]^T$.

4. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = y - 3xy', & x \in \left[\frac{1}{3}, 3\right] \\ y(\frac{1}{3}) = 1, y'(\frac{1}{3}) = 2 \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{3}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 1$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (\frac{5}{3}, \frac{5}{3})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{20}{9}, \frac{10}{9})^T$.

5. Identificare i due seguenti metodi alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + h\left[\alpha f(x_k, \eta_k) - 2f\left(x_k + 3\beta h, \eta_k + 3\beta h f(x_k, \eta_k)\right)\right],$$
$$\eta_{k+1} = \left(\frac{3}{2}\delta - 1\right)\eta_k - \frac{1}{2}\left(\delta^2 - \delta\right)\eta_{k-1} + hf(x_k, \eta_k).$$

Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il primo metodo è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine. Stabilire, inoltre, per quali valori di $\delta \in \mathbb{R}$ il secondo metodo è stabile.

Soluzione. Il primo metodo è monostep, esplicito, a due stadi, pertanto è stabile per ogni valore di α e β. Esso è consistente, e quindi convergente, per $\alpha = 3$; è di ordine 2 per $\alpha = 3$ e $\beta = -\frac{1}{12}$. Il secondo metodo è multistep, esplicito, a due passi. Esso è stabile quando $0 \leq \delta < 2$.