Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Recupero prima prova intermedia di Matematica Applicata

31 gennaio 2025

Compito numero 1

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Si dica, motivando la risposta, se il vettore $\mathbf{v}_1$ è ortogonale al vettore $\mathbf{v}_3$ e si calcoli la norma ∞, norma 1 e norma 2 del vettore $\mathbf{v}_2$. Si costruisca inoltre, mediante il procedimento di Gram-Schmidt modificato l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ a partire dai vettori dati. Dire se la matrice $Q = [\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1]$ è ortogonale e perché.

Soluzione. Il vettore $\mathbf{v}_1$ è ortogonale al vettore $\mathbf{v}_3$,

$$\|\mathbf{v}_2\|_\infty = 2, \quad \|\mathbf{v}_2\|_1 = 3, \quad \|\mathbf{v}_2\|_2 = \sqrt{5}.$$

I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

La matrice Q è ortogonale in quanto $Q^T Q = I$, essendo le sue colonne ortonormali.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad W = \begin{bmatrix} \beta & -1/2 & 1/2 \\ \beta & 1/2 & -1/2 \\ 0 & \beta & \beta \end{bmatrix},$$

dove α e β sono parametri reali. Dire per quali valori di α la matrice A è non singolare e verificare che $\lambda = -\alpha$ è un autovalore di A per ogni valore di α. Determinare i valori di α che rendono B l'inversa di A e i valori di β che rendono W ortogonale. Assegnati ad α e β i valori trovati, o uno di essi se non sono unici, calcolare la matrice $M = (AW)^{-1}$.

Soluzione. La matrice A è non singolare per $\alpha \neq 0, \pm\sqrt{2/3}$ e $\lambda = -\alpha$ è un autovalore per ogni $a \in \mathbb{R}$ perché $\det(A + aI) = 0$. La matrice A è l'inversa di B per $\alpha = 1$, W è ortogonale per $\beta = \pm\sqrt{2}/2$ e

$$M = (AW)^{-1} = W^T B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & \sqrt{2}/2 - 1 & 1/2 - \sqrt{2}/2 \\ -1 & \sqrt{2}/2 + 1 & -\sqrt{2}/2 - 1/2 \end{bmatrix}.$$

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-3y'' + 5y = x, \qquad x \in [-1/2, 1/2]$$

e dire se la serie del termine noto è differenziabile termine a termine.

Soluzione.

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi(5 + 12k^2\pi^2)} \sin(2k\pi x).$$

Il termine noto non è differenziabile termine a termine.

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1 + \mathrm{i}k}{9 + 3k^2}\right\}, \qquad \mathcal{F}\left\{4x\mathrm{e}^{-4|x|}\right\}.$$

Soluzione.

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{18}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}|x|} - \frac{1}{6}\left[\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x}H(x) - \mathrm{e}^{\sqrt{3}x}H(-x)\right],$$
$$F(k) = -\frac{64\mathrm{i}k}{(16 + k^2)^2}.$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - 5\sqrt{2}y' + 12y = \delta(x - 3), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\mathrm{e}^{2\sqrt{2}(x-3)} - \mathrm{e}^{3\sqrt{2}(x-3)}\right], & x \leq 3, \\ 0, & x \geq 3. \end{cases}$$