Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
15 luglio 2024

1. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
e la si utilizzi per calcolare la terza colonna della sua inversa, il suo determinante e la soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $b = [10, 4, 1, 7]^T$.

   Soluzione.
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$A^{-1}\mathbf{e}_3 = [-1, 1/4, 1/4, 1]^T, \quad \mathbf{x} = [1, 1, 2, 2]^T, \quad \det(A) = 24.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove
$$A = \begin{bmatrix} \beta & 2 & 0 \\ 2 & 2\beta & 2 \\ 0 & 2 & \beta \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Si stabilisca per quali valori del parametro β il sistema ammette un'unica soluzione e per quali la matrice A é simmetrica definita positiva. Si studi, al variare del parametro β, la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Si fissi $\beta = 3$ e si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

   Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\beta \neq 0, \pm 2$, simmetrica per ogni valore di β, definita positiva per $\beta > 2$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $\beta < -2$ o $\beta > 2$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [-1/3, 0, -1/3]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [1/3, 2/9, 1/3]^T$.

3. Trasformare il seguente problema del second'ordine
$$\begin{cases} y''(x) = \frac{x}{y'} \\ y(2) = 0, \ y'(2) = 2 \end{cases}$$
in un sistema del prim'ordine e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 3$.

   Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (1, \frac{5}{2})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{9}{4}, 3)^T$.

4. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione e stabilire se questa è differenziabile termine a termine motivando opportunamente la risposta

$$f(x) = \sin(x), \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Soluzione. La serie della f non è differenziabile termine a termine e risulta essere

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(1-4k)\frac{\pi}{4}}{1-4k} - \frac{\sin(1+4k)\frac{\pi}{4}}{1+4k}\right]\sin(4kx) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16\sqrt{2}(-1)^k k}{(1-16k^2)\pi}\sin(4kx).$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale in $\mathbb{R}$

$$y'' + 2y' - 8y = \delta(x-3), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = -\frac{1}{6}\left[e^{-4(x-3)}H(x-3) + e^{2(x-3)}H(3-x)\right].$$