Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

28 giugno 2024

1. Si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

e la si utilizzi per calcolare la seconda colonna della sua inversa, il suo determinante e la soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $b = [12, -1, 16, 6]^T$.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A\mathbf{e}_2 = [1/3, 1/3, 1/3, 0]^T, \quad \mathbf{x} = [1, -2, 0, -1]^T, \quad \det(A) = -48.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} \gamma, 1, 0 \\ 1, \gamma, 2 \\ 0, 2, \gamma \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro γ il sistema ammette un'unica soluzione e per quali la matrice A é simmetrica definita positiva. Si studi, al variare del parametro γ, la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Si fissi $\gamma = 3$ e si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\gamma \neq 0, \pm\sqrt{5}$, simmetrica per ogni valore di γ, definita positiva per $\gamma > \sqrt{5}$. Il metodo di Jacobi converge per $\gamma < -\sqrt{5}$ o $\gamma > \sqrt{5}$. Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono $\mathbf{x}^{(1)} = [0, 0, 1/3]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [1/3, -1/3, 5/9]^T$.

3. Trasformare il seguente problema del second'ordine

$$\begin{cases} y''(x) = y' - \dfrac{y}{x + y'} \\ y(1) = -1, \; y'(1) = 0 \end{cases}$$

in un sistema del prim'ordine e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{2}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 2$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (-1, \frac{1}{2})^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (-\frac{3}{4}, 1)^T$.

4. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione e stabilire se questa è differenziabile termine a termine motivando opportunamente la risposta

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{5} + 1, & x \in [0, 5] \\ \frac{x}{5} + 1, & x \in [-5, 0] \end{cases} .$$

Soluzione. La serie della f è differenziabile termine a termine e risulta essere

$$S_f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^k)}{k^2} \cos\left(k \frac{\pi}{5} x\right).$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale in $\mathbb{R}$

$$y'' + 2y' - 15y = \delta(x - 2), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \frac{1}{8} \left[e^{-5(x-2)} H(x - 2) - e^{3(x-2)} H(2 - x) \right].$$