

Nome e matricola: .....

Corso di studi: .....

### Prova scritta di Matematica Applicata

12 giugno 2024

1. Si calcoli la fattorizzazione  $PA = LU$  della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e la si utilizzi per calcolare la prima colonna della sua inversa, il suo determinante e la soluzione del sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  con  $\mathbf{b} = [-5, -1, 7, 2]^T$ .

*Soluzione.*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A\mathbf{e}_1 = [2, -1, 0, 0]^T, \quad \mathbf{x} = [1, 2, 1, -2]^T, \quad \det(A) = -3.$$

2. Si consideri il sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro  $\alpha$  il sistema ammette un'unica soluzione e per quali la matrice  $A$  è simmetrica definita positiva. Si studi, al variare del parametro  $\alpha$ , la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema. Si fissi  $\alpha = 2$  e si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel a partire da  $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 0]^T$ .

*Soluzione.* La matrice dei coefficienti è non singolare se  $\alpha \neq \pm 1$ , simmetrica per ogni valore di  $\alpha$ , definita positiva per  $\alpha > 1$ . Il metodo di Jacobi converge per  $\alpha < -1$  o  $\alpha > 1$ . Le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel sono  $\mathbf{x}^{(1)} = [0, 1/2, 1/4]^T$  e  $\mathbf{x}^{(2)} = [0, 3/8, 5/16]^T$ .

3. Trasformare il seguente problema del second'ordine

$$\begin{cases} y''(x) = xy - \frac{x}{3 + y(x)y'(x)} \\ y(1) = -1, \quad y'(1) = 2 \end{cases}$$

in un sistema del prim'ordine e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo  $h = \frac{1}{4}$  per approssimare la sua soluzione in  $x = 3/2$ .

*Soluzione.*  $\boldsymbol{\eta}_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})^T$ ,  $\boldsymbol{\eta}_2 = (-\frac{1}{8}, \frac{347}{288})^T$ .

4. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - 2y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 0] \\ \pi x, & x \in [0, 1] \end{cases}.$$

Dire inoltre se la serie del termine noto è differenziabile termine a termine e perché.

*Soluzione.* La serie del termine noto non è differenziabile termine a termine perché la funzione non è continua. Inoltre, risulta

$$S_y(x) = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2 + (k\pi)^2} \sin(k\pi x) + \frac{b_k}{2 + (k\pi)^2} \cos(k\pi x),$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi k^2} (1 - (-1)^k), \quad b_k = \frac{1}{k} \left( -\frac{1}{\pi} + (-1)^k \left( \frac{1}{\pi} - 1 \right) \right).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{e^{3ix}}{5 - ix} \sin \pi x \right\}, \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-2ik} \frac{\sin(2k - 8)}{k - 4} \right\}.$$

*Soluzione.*

$$F(k) = -\pi i e^{-5(k-3)} [e^{5\pi} H(k - \pi - 3) - e^{-5\pi} H(k + \pi - 3)],$$

$$f(x) = \frac{e^{4i(x-2)}}{2} [H(x) - H(x - 4)].$$