CAPTIOLO 12

INTEGRALI DEFINITI

. Il metodo di esaustione

Con l'espressione «*metodo di esaustione*» si fa riferimento ad un metodo r calcolare le aree ed i volumi di figure curvilinee, usato da Archimede l III secolo a.C., ma risalente, secondo lo stesso Archimede, ed Eudosso Cnide, vissuto nel IV secolo a.C.

Abbiamo già descritto nel paragrafo 40 il metodo che Archimede utilizva per calcolare l'area di un cerchio, approssimando tale area con le aree poligoni regolari di n lati inscritti (o circoscritti). Riferendoci a questo empio, con la parola «*esaustione*» si vuole significare che un cerchio viene empito, o «*esaurito*», inscrivendo in esso poligoni regolari di n lati, e cendo poi tendere n all'infinito.

Descriviamo in questo paragrafo il metodo di esaustione con il linaggio moderno, facendo uso della teoria dei limiti, in modo da facilitare comprensione del metodo generale che introdurremo nel paragrafo sucssivo.

Calcoliamo con il metodo di esaustione l'area di un *settore di parabola*, oè l'area della regione S che nel piano cartesiano x, y è compresa tra l'asse elle x, il grafico della funzione $f(x) = x^2$ nell'intervallo [0, b], e la retta erticale di equazione $x = b$ $(b > 0)$, come in figura 12.1.

Dividiamo l'intervallo [0, b] in $n \in \mathbf{N}$ intervalli, $[x_{k-1}, x_k]$, ciascuno di mpiezza b/n, ponendo:

$$(95.1)\quad x_0 = 0, \qquad x_1 = \frac{1}{n}b, \qquad x_2 = \frac{2}{n}b, \ldots, \qquad x_k = \frac{k}{n}b, \ldots, \qquad x_n = b.$$

Calcoliamo l'area della regione tratteggiata nella figura 12.2. La regione ratteggiata è unione di rettangoli. Il generico rettangolo ha per base l'interallo $[x_{k-1}, x_k]$, di lunghezza uguale a b/n, ed ha per altezza il valore della unzione in x_{k-1}, cioè $f(x_{k-1}) = x_{k-1}^2$. L'area totale è data dalla somma delle ree dei rettangoli componenti, cioè (il simbolo di sommatoria è stato ntrodotto nel paragrafo 88):

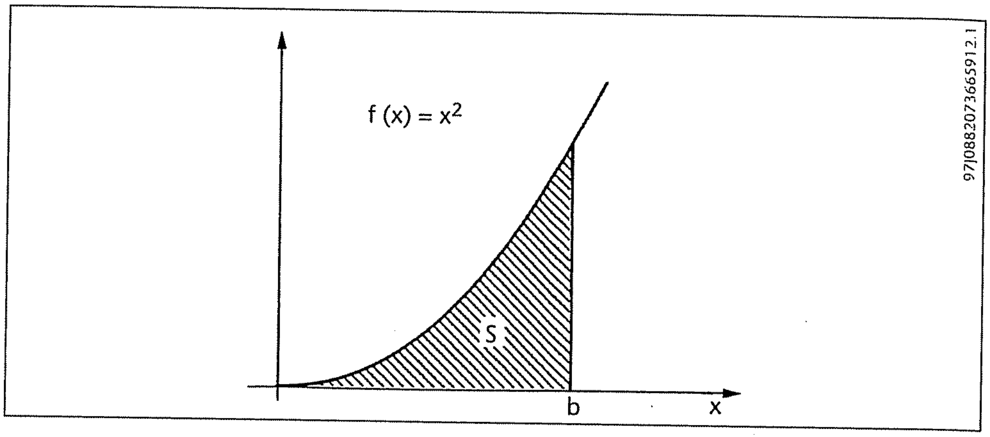

Figura 12.1

$$(95.2) \qquad \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\,(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}^2 \frac{b}{n} = \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}^2 .$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo semplicemente messo in evidenza il fattore b/n, comune a tutti gli addendi della somma.

Per facilitare il lettore osserviamo che la (95.2) si può riscrivere esplicitamente, senza l'uso del simbolo di sommatoria, nel modo seguente:

$$f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)\,(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + \ldots +$$

$$(95.3) \qquad + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = x_0^2 \frac{b}{n} + x_1^2 \frac{b}{n} + \ldots + x_{k-1}^2 \frac{b}{n} + \ldots + x_{n-1}^2 \frac{b}{n} =$$

$$= \frac{b}{n}\,(x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{k-1}^2 + \ldots + x_{n-1}^2).$$

La somma indicata nella (95.2) è un'approssimazione per difetto dell'area della regione S. Analogamente otteniamo un'approssimazione per eccesso considerando l'area della unione di rettangoli, come in figura 12.3.

Rispetto al caso precedente, stiamo considerando rettangoli con la stessa base, ma con diversa altezza. Il generico rettangolo ha per base l'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$, e per altezza $f(x_k) = x_k^2$. L'area totale in questo caso è data da

$$(95.4) \qquad \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \frac{b}{n} = \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 .$$

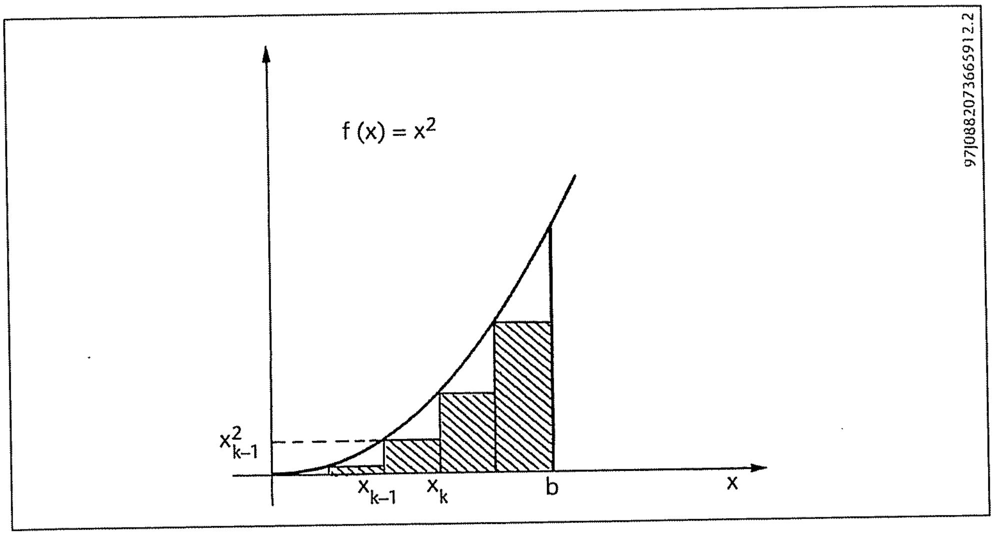

Figura 12.2

Quindi abbiamo ottenuto le seguenti stime per difetto e per eccesso dell'area della regione S:

(95.5) $$\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{k-1}^2 < \mathit{area}\ S < \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\,, \qquad \forall n \in \mathbf{N};$$

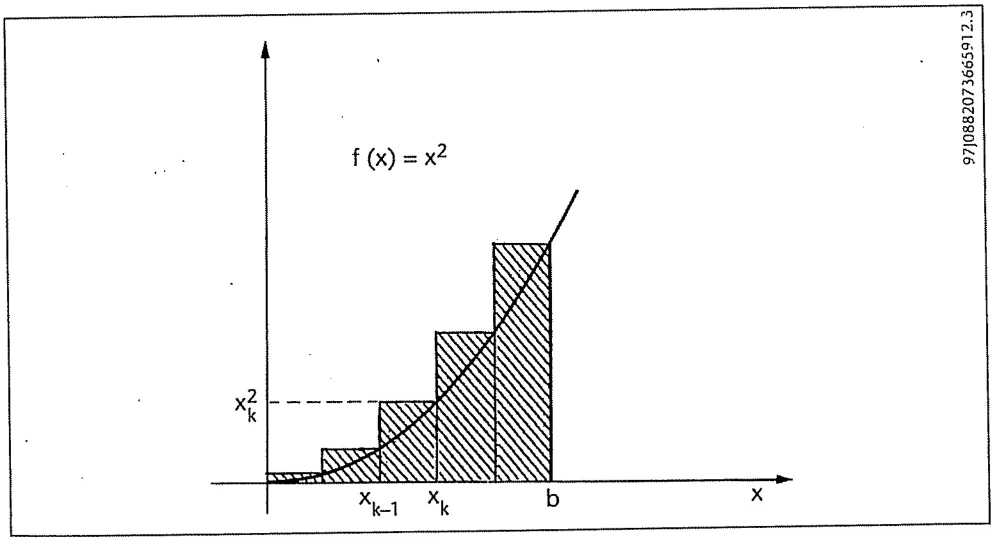

Figura 12.3

la somma a primo membro è detta *somma integrale inferiore*, mentre quella all'ultimo membro è detta *somma integrale superiore*.

Ricordando la definizione (95.1) di x_k, valutiamo l'ultima sommatoria:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} b\right)^2 = \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 \; ; \tag{95.6}$$

la (95.5) si può quindi riscrivere:

$$\frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 < \textit{area } S < \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \, . \tag{95.7}$$

Si verifica facilmente per mezzo del principio di induzione:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n \, (n+1) \, (2n+1). \tag{95.8}$$

Sostituiamo questo valore nell'ultimo membro della (95.7), mentre a primo membro sostituiamo il valore della somma corrispondente, cambiando quindi n con n − 1. Otteniamo:

$$\frac{b^3}{6} \frac{(n-1) \, n(2n-1)}{n^3} < \textit{area } S < \frac{b^3}{6} \frac{n(n+1) \, (2n+1)}{n^3} \; ; \tag{95.9}$$

cioè, semplificando:

$$\frac{b^3}{6} \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} < \textit{area } S < \frac{b^3}{6} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \, , \qquad \forall n \in \mathbf{N}. \tag{95.10}$$

Si calcola facilmente il limite per $n \to +\infty$ delle successioni che compaiono nella relazione precedente (si può ad esempio dividere numeratore e denominatore per n^2). Dato che il limite del primo membro è uguale al limite del membro a destra, il comune valore ($= b^3/3$) è l'area della regione S. Abbiamo quindi ritrovato il risultato di Archimede: l'area del settore di parabola S, come in figura 12.1, è data da

$$\textit{area } S = \frac{b^3}{3} \, . \tag{95.11}$$

Si noti ciò che apparentemente può sembrare una coincidenza: derivando il risultato trovato rispetto a b otteniamo:

$$\frac{d}{db}\,(\textit{area } S) = b^2 \,. \tag{95.12}$$

Cioè, la derivata dell'area, pensata come funzione del parametro b, è uguale al valore della funzione $f(x) = x^2$, che ci è servita per definire la regione S, calcolata per x = b. Chiariremo nel paragrafo 101 l'importanza di questa apparente curiosità.

Nei paragrafi seguenti introduciamo l'integrale definito sulla base delle idee sopra esposte.

96. L'integrale definito: interpretazione geometrica

L'*integrale definito*, nonostante abbia una interpretazione geometrica molto semplice e significativa, risulta talvolta, dal punto di vista della definizione, un concetto matematico di difficile comprensione per lo studente. Per tale motivo abbiamo ritenuto opportuno posporre al paragrafo 98 la definizione di *integrale definito* che, pur in una formulazione rigorosa, è comunque presentata in modo semplice ed essenziale; nei paragrafi 98-100 viene completato l'argomento con tutte le necessarie dimostrazioni.

Comunque, per facilitare il lettore che per la prima volta si avvicina al concetto di integrale definito, ne premettiamo in questo paragrafo l'interpretazione geometrica. Ad una prima lettura, dopo il presente paragrafo 96 ed il successivo 97, si potrà saltare al teorema fondamentale del calcolo integrale, proposto all'inizio del capitolo 13.

Sia f(x) una funzione continua in un intervallo [a, b]. Con riferimento alla figura 12.4 definiamo gli insiemi

$$A = \{(x, y)\colon a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}\ ; \tag{96.1}$$

$$B = \{(x, y)\colon a \le x \le b,\ f(x) \le y \le 0\}. \tag{96.2}$$

Un punto di coordinate (x, y) appartiene all'insieme A se $x \in [a, b]$ e $y \in [0, f(x)]$; in particolare è necessario che l'intervallo [0, f(x)] sia non vuoto, cioè è necessario che f(x) sia maggiore od uguale a zero. Quindi l'insieme A può essere definito equivalentemente nella forma

$$A = \{(x, y)\colon\quad x \in [a, b],\quad f(x) \ge 0,\quad y \in [0, f(x)]\} \tag{96.3}$$

e, analogamente, l'insieme B può essere definito equivalentemente nella forma

$$(96.4) \qquad B = \{(x, y): \quad x \in [a, b], \quad f(x) \le 0, \quad y \in [f(x), 0]\}.$$

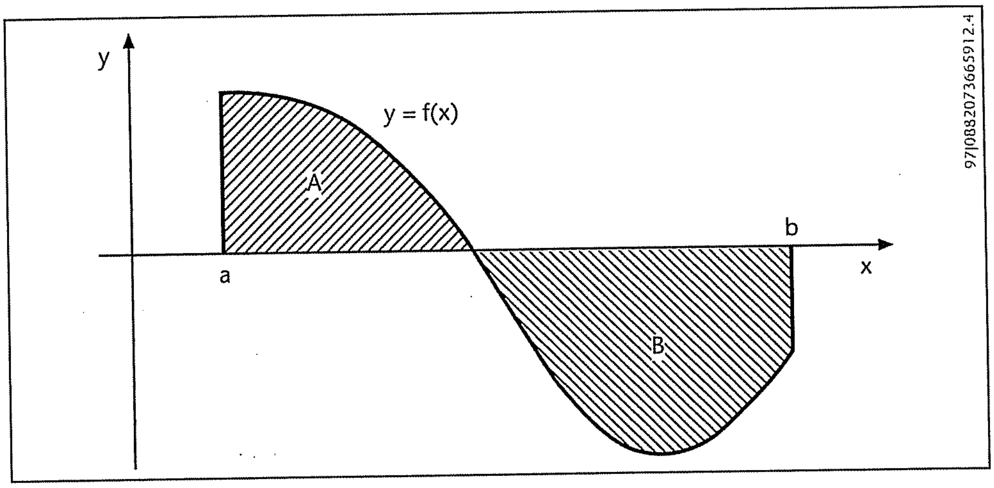

Figura 12.4

Quindi, in particolare, se per ogni x ∈ [a, b] risulta f(x) > 0 (come in figura 12.5) allora l'insieme B è vuoto; mentre, se f(x) < 0 per ogni x ∈ [a, b], allora l'insieme A è vuoto (figura 12.6). Gli insiemi A e B sono detti *rettangoloidi* relativi alla funzione f(x) nell'intervallo [a, b].

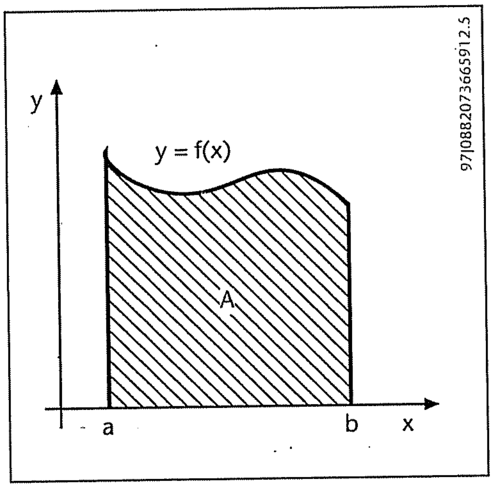

Figura 12.5

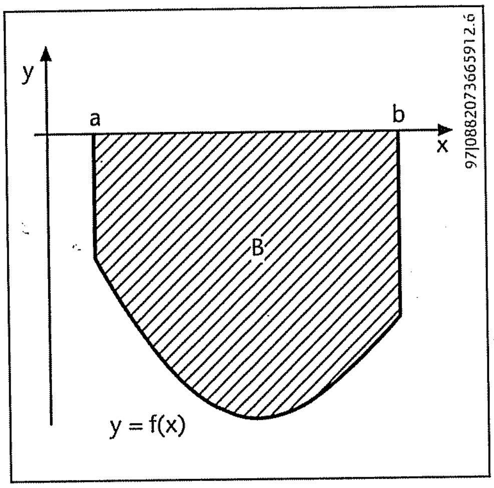

Figura 12.6

È importante tenere presente (la dimostrazione è fornita nel paragrafo 99) che è sempre possibile definire l'area degli insiemi A e B nel caso in cui la funzione f(x) sia *continua* in tutto l'intervallo chiuso e limitato [a, b].

L'area, in linea di principio, si calcola in modo analogo a come fatto nel paragrafo precedente per il settore di parabola.

In breve ciò si enuncia dicendo che ogni funzione *continua* f(x) è *integrabile* in ogni intervallo chiuso e limitato [a, b]. In tal caso l'*integrale definito* tra a e b (indicato con il simbolo a primo membro della (96.5)) è dato da

$$\int_a^b f(x)\,dx = \textit{area}\ A - \textit{area}\ B. \tag{96.5}$$

In particolare, se $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, allora l'area dell'insieme B vale zero (analogamente se $f(x) \leq 0$ in [a, b]); quindi

$$f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = \textit{area}\ A; \tag{96.6}$$

$$f(x) \leq 0,\ \forall x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\,\textit{area}\ B. \tag{96.7}$$

Ad esempio, secondo la (96.6), l'area del settore di parabola S in figura 12.1, delimitato dalla funzione $f(x) = x^2$, in base al risultato (95.11), si esprime con l'integrale definito:

$$\int_0^b x^2\,dx = \textit{area}\ S = \frac{b^3}{3}. \tag{96.8}$$

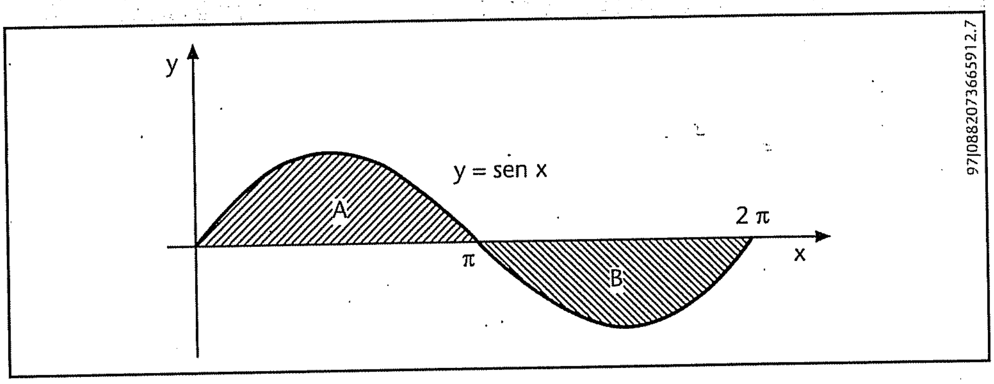

Figura 12.7

Come ulteriore esempio consideriamo l'integrale definito della funzione f(x) = sen x nell'intervallo [0, 2π]. L'integrale è nullo perché, con riferimento alla figura 12.7, l'area dell'insieme A è uguale all'area dell'insieme B:

$$\int_0^{2\pi} \text{sen x dx} = \textit{area}\ A - \textit{area}\ B = 0. \tag{96.9}$$

Quanto vale l'integrale definito della funzione sen x nell'intervallo $[0, \pi]$? In altre parole, quanto vale l'area dell'insieme A in figura 12.7 ?

Con il metodo di esaustione si potrebbe giungere al risultato, che peraltro è determinato per altra (più semplice) via nel paragrafo 102. Limitiamoci in questa sede a valutazioni per eccesso e per difetto: con riferimento alla figura 12.8, l'insieme A è contenuto nel rettangolo R avente per base l'intervallo $[0, \pi]$ e altezza lunga 1; quindi:

$$\int_0^{\pi} \text{sen x dx} = \textit{area}\ A < \textit{area}\ R = \pi. \tag{96.10}$$

Con riferimento alla figura 12.9, l'insieme A contiene il triangolo T, di base $[0, \pi]$ e l'altezza lunga 1; perciò:

$$\int_0^{\pi} \text{sen x dx} = \textit{area}\ A > \textit{area}\ T = \frac{\pi}{2}. \tag{96.11}$$

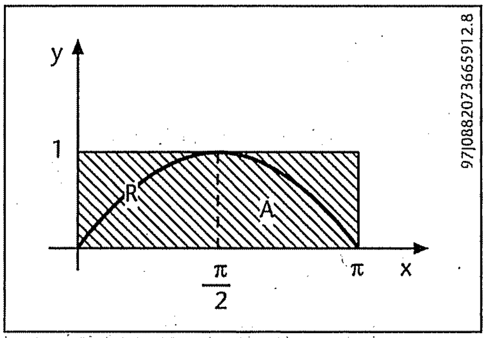

Figura 12.8

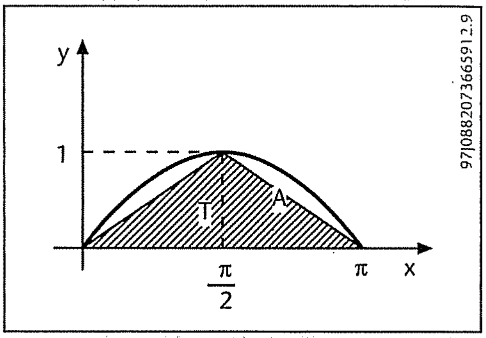

Figura 12.9

Quindi, l'integrale della funzione sen x, nell'intervallo $[0, \pi]$, è un numero compreso tra $\pi/2 \simeq 1.5...$ e $\pi \simeq 3.1...$; verificheremo alla fine del paragrafo 102 che l'integrale è uguale a 2.

È utile considerare l'integrale definito anche se il primo estremo di integrazione non è minore del secondo estremo di integrazione. In tal caso poniamo:

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx \qquad (a > b); \tag{96.12}$$

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0. \tag{96.13}$$

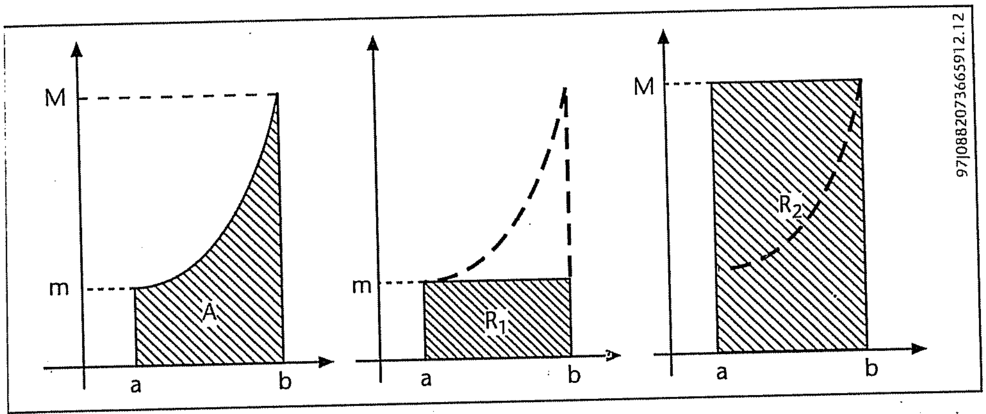

Figura 12.12

Quindi l'integrale definito di f, diviso per b − a, è un numero y compreso tra il minimo ed il massimo della funzione f. Per il secondo teorema dell'esistenza dei valori intermedi (paragrafo 56), la funzione f assume *tutti* i valori compresi tra m ed M. In particolare f assume anche il valore y. Perciò esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ per cui $f(x_0) = y$, cioè:

(97.6)
$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx,$$

che equivale alla tesi (97.2).

98. Definizioni e notazioni

Nel prosieguo si studia in maniera più approfondita la teoria dell'integrazione definita introdotta nei precedenti tre paragrafi. In prima lettura il presente paragrafo ed i successivi possono essere saltati e rinviati ad una successiva fase di approfondimento.

Sia f(x) una funzione *limitata* nell'intervallo chiuso [a, b] di **R**.

Una *partizione* P di [a, b] è un insieme ordinato costituito di n + 1 punti distinti $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $n \in \mathbf{N}$, tali che

(98.1)
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Quindi, per definizione, risulta $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Gli n + 1 punti individuano n intervalli $[x_{k-1}, x_k]$, con k = 1, 2,..., n.

Per ogni partizione P di [a, b], poniamo

(98.2) $$m_k = \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

(98.3) $$M_k = \sup \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Definiamo poi le *somme (integrali) inferiori*

(98.4) $$s(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$$

e le *somme (integrali) superiori*

(98.5) $$S(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}).$$

Se la funzione f(x) è positiva in [a, b], le somme integrali hanno il chiaro significato geometrico di somma delle aree dei rettangoli rispettivamente inscritti e circoscritti, come in figura 12.13. Si noti però che s(P), S(P) sono definite, indipendentemente dal significato geometrico di area, anche se f(x) non è positiva nell'intervallo [a, b].

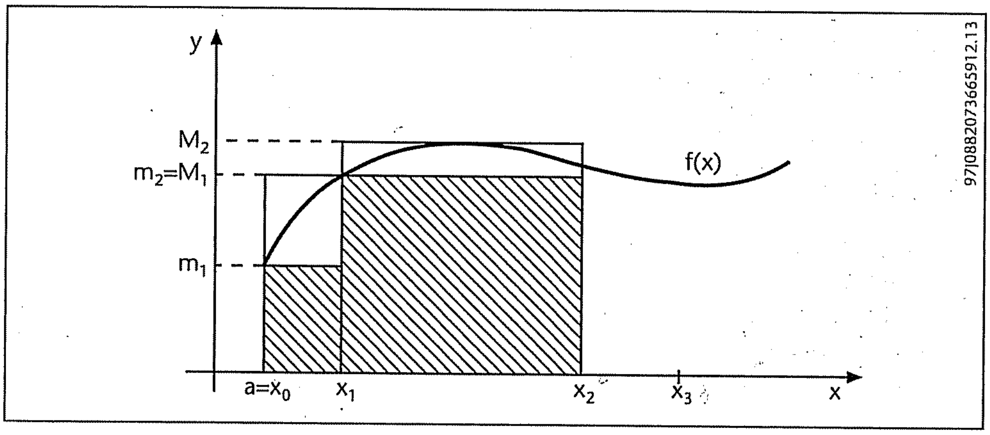

Figura 12.13

Dato che $m_k \le M_k$ per ogni k, dalla definizione risulta che

(98.6) $$s(P) \le S(P), \qquad \forall\ P.$$

Più in generale, vale il seguente

LEMMA. — *Sia* $m \le f(x) \le M$ *per* $x \in [a, b]$; *per ogni coppia di partizioni* P, Q *di* $[a, b]$, *si ha*

$$m(b - a) \le s(P) \le S(Q) \le M(b - a). \tag{98.7}$$

Dimostrazione: poniamo $R = P \cup Q$, cioè indichiamo con R la partizione che si ottiene rendendo contemporaneamente i punti di P e i punti Q. Cominciamo col confrontare fra loro somme integrali inferiori s(P) e s(R). Supponiamo, per semplicità che R contenga un solo unto $\bar{x}$ in più di P e siano x_{k-1}, x_k due punti consecutivi della partizione P tali che $\bar{x} \in [x_{k-1}, x_k]$. oniamo

$$\overline{m}_1 = \inf \{f(x): x \in [x_{k-1}, \bar{x}]\}; \tag{98.8}$$

$$\overline{m}_2 = \inf \{f(x): x \in [\bar{x}, x_k]\}. \tag{98.9}$$

e somme inferiori s(R) e s(P) differiscono per pochi termini; precisamente:

$$s(R) - s(P) =$$

$$= [\overline{m}_1 (\bar{x} - x_{k-1}) + \overline{m}_2 (x_k - \bar{x})] - m_k (x_k - x_{k-1}). \tag{98.10}$$

ssendo $\overline{m}_1 \ge m_k$, $\overline{m}_2 \ge m_k$, in quanto l'insieme dei valori f(x) per $x \in [x_{k-1}, x_k]$ contiene sia nsieme delle f(x) per $x \in [x_{k-1}, \bar{x}]$, sia l'insieme delle f(x) per $x \in [\bar{x}, x_k]$, otteniamo:

$$s(R) - s(P) \ge m_k (\bar{x} - x_{k-1} + x_k - \bar{x} - x_k + x_{k-1}) = 0. \tag{98.11}$$

Si procede in modo analogo se la partizione R contiene più di un punto rispetto alla rtizione P. Quindi

$$s(P) \le s(R). \tag{98.12}$$

Analogamente si dimostra che

$$S(R) \le S(Q). \tag{98.13}$$

Da tali relazioni e dalla (98.6) si ricava

$$s(P) \le s(R) \le S(R) \le S(Q). \tag{98.14}$$

r concludere la dimostrazione del lemma, basta provare che, per ogni partizione R di [a,], risulta

$$m(b - a) \le s(R) \le S(R) \le M(b - a). \tag{98.15}$$

Limitiamoci a provare la prima disuguaglianza di (98.15). A tale scopo basta applicare il ragionamento, che ci ha permesso di ottenere la (98.14), alla partizione banale P = {a, b}; infatti risulta R = P, ovvero R ha almeno un punto più di P.

Indichiamo ora con A l'insieme numerico descritto dalle somme integrali inferiori s(P) al variare delle partizioni P dell'intervallo [a, b] e con B l'insieme delle corrispondenti somme superiori:

$$A = \{s(P)\}; \quad B = \{S(P)\}. \tag{98.16}$$

Dal lemma precedente segue che i due insiemi A e B sono *separati*, cioè $a \leq b$ per ogni $a \in A$, $b \in B$. Dall'assioma (2.11) di completezza segue che esiste almeno un numero reale c maggiore o uguale a tutti gli elementi di A e minore o uguale a tutti gli elementi di B.

Supponiamo che tale elemento c sia l'*unico* elemento di separazione fra A e B; in altre parole, posto

$$s(f) = \sup \{s(P): P \textit{ partizione di } [a, b]\}, \tag{98.17}$$

$$S(f) = \inf \{S(P): P \textit{ partizione di } [a, b]\}, \tag{98.18}$$

supponiamo che risulti

$$c = s(f) = S(f); \tag{98.19}$$

allora diremo che f(x) è *integrabile secondo Riemann* in [a, b].

In tal caso l'elemento di separazione c si indica con

$$\int_a^b f(x)\, dx \tag{98.20}$$

e si chiama *integrale definito* di f in [a, b].

Dal lemma precedente segue banalmente che, se f(x) è una funzione costante, con f(x) = m per ogni $x \in [a, b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b m\, dx = m(b - a). \tag{98.21}$$

Dalle proprietà dell'estremo inferiore e dell'estremo superiore si ricava poi il seguente:

TEOREMA. — *Una funzione* f *limitata in* [a, b] *è ivi integrabile secondo Riemann se e solo se, per ogni* $\varepsilon > 0$, *esiste una partizione* P *di* [a, b] *tale che*

$$S(P) - s(P) < \varepsilon. \tag{98.22}$$

L'integrale definito di una funzione ha un notevole significato geometrico. Ad esempio, se f(x) è una funzione positiva, integrabile nell'intervallo chiuso [a, b], qualunque sia la partizione $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ di [a, b], la somma s(P) rappresenta l'area di un *plurirettangolo* (cioè di una unione di rettangoli) *contenuto* nell'insieme

$$S = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbf{R} \colon O \le y \le f(x)\}, \tag{98.23}$$

mentre la somma S(P) rappresenta l'area di un plurirettangolo *contenente* S (si veda anche la precedente figura 12.13). L'insieme S prende il nome di *rettangoloide* di base [a, b] relativo alla funzione f(x).

Il teorema precedente afferma allora che, nelle nostre ipotesi, si possono trovare un plurirettangolo contenente S ed uno contenuto in S le cui aree differiscono per meno di ε. Dunque è ragionevole attribuire a S un'*area* uguale all'elemento di separazione tra le aree dei plurirettangoli «inscritti» e quelle dei plurirettangoli «circoscritti». In altre parole, possiamo affermare che, *se* f(x) *è positiva e integrabile, l'area del rettangoloide di base* [a, b] *è uguale all'integrale* (98.20).

Concludiamo il paragrafo con alcune notazioni e definizioni, utili per il seguito. Nell'espressione (98.20) i numeri a, b si dicono *estremi di integrazione*, la funzione f si dice *funzione integranda*, la variabile x si dice *variabile di integrazione.*

Si noti che il risultato dell'integrazione non dipende da x, cioè non è una funzione (non costante) di x, ma è semplicemente un numero reale.

È utile considerare l'integrale definito (98.20) anche se il primo estremo di integrazione non è minore del secondo. Come già indicato nel paragrafo 96, poniamo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad (a > b); \tag{98.24}$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{98.25}$$

99. Proprietà degli integrali definiti

Esaminiamo alcune semplici proprietà dell'integrale definito di una funzione integrabile secondo Riemann in un intervallo chiuso e limitato. Cominciamo con una proprietà che ha un chiaro significato geometrico quando si interpretano gli integrali definiti di funzioni positive come aree di certe regioni piane. In tale contesto la *proprietà di additività* corrisponde al fatto che l'area della unione di due regioni piane prive di punti in comune è uguale alla somma delle due aree (si veda anche il paragrafo 97).

ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE RISPETTO ALL'INTERVALLO. — *Se* a, b, c *sono tre punti di un intervallo dove la funzione* f(x) *è integrabile, allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{99.1}$$

Dimostrazione: se due, tra i tre punti a, b, c, coincidono fra loro, allora la tesi (99.1) segue dalle definizioni (98.24), (98.25). Altrimenti, consideriamo preliminarmente il caso in cui c sia un punto interno all'intervallo [a, b]. Se P_1, P_2 sono partizioni rispettivamente degli intervalli [a, c], [c, b], allora $P = P_1 \cup P_2$ è una partizione dell'intervallo [a, b] e risulta:

$$s(P) = s(P_1) + s(P_2); \qquad S(P) = S(P_1) + S(P_2). \tag{99.2}$$

Da ciò segue facilmente la tesi. I casi rimanenti (ad esempio con b interno all'intervallo [a, c], ecc) si riconducono al caso già trattato, tramite la (98.24).

Un'altra proprietà notevole che non dimostriamo per brevità è la:

LINEARITÀ DELL'INTEGRALE. — *Se* f, g *sono funzioni integrabili in* [a, b] *e se* c *è un numero reale, anche* f + g *e* c · f *sono integrabili in* [a, b] *e risulta*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx; \tag{99.3}$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx. \tag{99.4}$$

Dalla definizione di integrale segue facilmente anche la seguente proprietà:

CONFRONTO TRA INTEGRALI. — *Se* f, g *sono funzioni integrabili in* [a, b] *e se* f(x) ≤ g(x) *per ogni* x ∈ [a, b] *allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \tag{99.11}$$

Dato che l'integrale definito della funzione identicamente nulla è zero, dalla proprietà precedente si deduce che:

$$f(x) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \ge 0 \qquad (a < b). \tag{99.12}$$

Infine, utilizzando le disuguaglianze

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|, \qquad \forall x \in [a, b], \tag{99.13}$$

ancora dalla proprietà di confronto (99.11) e dalla (99.4) con c = – 1, si deduce

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx, \tag{99.14}$$

che, in base alla equivalenza (9.9) relativa al valore assoluto, si scrive anche nella forma:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (a < b). \tag{99.15}$$

100. Uniforme continuità. Teorema di Cantor

Allo scopo di dimostrare che una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato risulta integrabile secondo Riemann in tale insieme, introduciamo in questo paragrafo il concetto di *uniforme continuità*.

Sia f(x) una funzione continua nell'intervallo I di **R**. Allora, per ogni $x_0 \in I$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tale che, se $x \in I$ e $|x - x_0| < \delta$, risulta $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Tale numero δ dipende, in generale, sia da ε che da x_0.

in simboli:

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0: \forall\, \delta > 0, \exists x, x' \in [a, b]: \text{vale (100.6)}. \tag{100.7}$$

Scegliamo $\delta = 1/n$, con $n \in \mathbf{N}$, e indichiamo con x_n, x'_n i corrispondenti punti di [a, b] per cui vale la (100.6); abbiamo quindi

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0: \quad \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad \exists\, x_n, x'_n \in [a, b]:$$

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0 . \tag{100.8}$$

Per il teorema di Bolzano – Weierstrass (paragrafo 61) esiste una successione x_{n_k}, estratta da x_n, convergente verso un punto $x_0 \in [a, b]$; inoltre, essendo

$$x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < x'_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k}, \qquad \forall k \in \mathbf{N}, \tag{100.9}$$

per il teorema dei carabinieri anche x'_{n_k} converge ad x_0 per $k \to +\infty$.

Dall'ipotesi di continuità di f(x) segue

$$\lim_{k \to +\infty} [f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})] = f(x_0) - f(x_0) = 0, \tag{100.10}$$

che contrasta con il fatto che

$$|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon_0, \quad \forall\, k \in \mathbf{N}. \tag{100.11}$$

101. Integrabilità delle funzioni continue

Dimostriamo il seguente teorema di

> INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE. — *Sia* f(x) *una funzione continua in* [a, b]. *Allora* f(x) *è integrabile secondo Riemann in* [a, b].

Dimostrazione: per il teorema di Cantor, f(x) è uniformemente continua e perciò, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b - a}, \tag{101.1}$$

per ogni coppia di punti $x, x' \in [a, b]$ tali che $|x - x'| < \delta$. Se P è una partizione di [a, b], $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, con $x_0 = a$, $x_n = b$, tale che $|x_k - x_{k-1}| < \delta$ per ogni $k = 1,\dots,n$, allora, posto

$$\text{(101.2)} \qquad \begin{aligned} m_k &= \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \\ M_k &= \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \end{aligned}$$

risulta per la (101.1):

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b - a}, \qquad \forall\ k = 1,\dots,n,$$

e perciò

$$\text{(101.3)} \qquad \begin{aligned} S(P) - s(P) &= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \\ &< \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon; \end{aligned}$$

dal teorema del paragrafo 98 segue l'asserto.

102. I teoremi della media

(PRIMO) TEOREMA DELLA MEDIA. — *Sia* f *una funzione limitata ed integrabile in* [a, b]. *Allora*

$$\text{(102.1)} \qquad m(b - a) \le \int_a^b f(x)\, dx \le M(b - a),$$

ove $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

Dimostrazione: l'integrale definito è l'elemento di separazione delle somme integrali inferiori e delle somme integrali superiori; perciò, qualunque sia la partizione P dell'intervallo [a, b], si ha

$$s(P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(P). \tag{102.2}$$

Scegliendo la partizione banale di [a, b], costituita dai soli punti a, b (P = {a, b}), risulta

$$s(P) = m(b - a), \quad S(P) = M(b - a), \tag{102.3}$$

che, insieme alla (102.2), dà la tesi (102.1).

Il significato geometrico del teorema che segue è stato ampiamente discusso nel paragrafo 97.

(SECONDO) TEOREMA DELLA MEDIA. — *Se* f(x) *è continua in* [a, b], *esiste un punto* $x_0 \in$ [a, b] *tale che*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b - a)\,. \tag{102.4}$$

Dimostrazione: per il teorema di Weierstrass (paragrafo 56) esistono il valore minimo m ed il valore massimo M di f(x) in [a, b]. Dividendo per b – a (> 0) tutti i membri della tesi (102.1) del primo teorema della media, abbiamo

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M\,; \tag{102.5}$$

perciò il valore medio y di f(x) in [a, b], definito da

$$y = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \tag{102.6}$$

è un valore compreso fra il minimo m ed il massimo M di f(x) in [a, b]. In base al secondo teorema dell'esistenza dei valori intermedi (paragrafo 56), esiste $x_0 \in$ [a, b] tale che $f(x_0) = y$, che, ricordando la definizione (102.6) di y, equivale alla tesi (102.4).