 ISBN 978-88-08-18166-4

che esse sono date dall'insieme $\{(t, 3-t) | t \in \mathbb{R}\}$. Naturalmente avremmo potuto decidere di far variare liberamente la variabile x_2 e di esprimere x_1 in funzione di x_2. In tal caso avremmo descritto ogni soluzione del sistema nella forma $(3 - x_2, x_2)$, o equivalentemente avremmo affermato che l'insieme delle soluzioni è: $\{(3 - s, s) | s \in \mathbb{R}\}$. Il sistema assegnato ha dunque infinite soluzioni. In sintesi: *due variabili reali insieme a una sola condizione danno luogo a infinite soluzioni.*

Definizione 1.1.5 Due sistemi lineari si dicono *equivalenti* se hanno le stesse soluzioni.

Nell'Esempio 1.1.4 abbiamo osservato che il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

è equivalente all'equazione $x_1 + x_2 = 3$. Riuscire a capire se due sistemi sono equivalenti può essere molto utile, ad esempio potremmo tentare di risolvere un sistema lineare riducendolo a uno ad esso equivalente ma più semplice da risolvere.

Nel prossimo paragrafo introdurremo alcune nozioni utili per semplificare la scrittura di un sistema lineare.

1.2 Matrici

Dati due numeri naturali m, n, si chiama *matrice* $m \times n$ a coefficienti reali una tabella di mn numeri reali collocati su m righe e n colonne. Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

è una matrice 2×3.

Se $m = n$ la matrice si dice *quadrata* di ordine n. Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 3 \end{pmatrix}$$

è una matrice quadrata di ordine 2.

Indicheremo con $M_{m,n}(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici $m \times n$ a coefficienti reali e con $M_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti reali.

ISBN 978-88-08-18166-4

Data una matrice A, il numero reale che compare nella i-esima riga e nella j-esima colonna di A viene detto *elemento di posto* (i, j) di A, o anche *coefficiente di posto* (i, j). Ad esempio nella matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

l'elemento di posto $(1, 3)$ è 0 e l'elemento di posto $(2, 2)$ è 3. Naturalmente due matrici $m \times n$, A e B, sono uguali se coincidono coefficiente per coefficiente, cioè se l'elemento di posto (i, j) di A coincide con l'elemento di posto (i, j) di B, per ogni $i = 1, \ldots, m$ e per ogni $j = 1, \ldots, n$.

Data una generica matrice $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

essa può essere sinteticamente indicata nel modo seguente:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

dove a_{ij} è l'elemento di posto (i, j), $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Date due matrici A e B appartenenti entrambe a $M_{m,n}(\mathbb{R})$, è possibile affettuare la loro somma, coefficiente per coefficiente, cioè se

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \qquad B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

la matrice $C = A + B$ ha come coefficiente di posto (i, j) l'elemento

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

con $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Vogliamo ora definire il prodotto righe per colonne, o semplicemente prodotto, tra due matrici A e B, nel caso in cui le righe di A abbiano la stessa lunghezza delle colonne di B.

 ISBN 978-88-08-18166-4

Se A è una matrice $m \times s$ e B è una matrice $s \times n$, definiamo il prodotto c_{ij} della riga i di A e della colonna j di B nel modo seguente:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{is} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{is}b_{sj}$$

che si indica in forma compatta con

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^{s} a_{ih}b_{hj}$$

In pratica abbiamo moltiplicato, nell'ordine, i coefficienti della riga i-esima di A per i coefficienti della colonna j-esima di B, dopodiché abbiamo sommato i numeri ottenuti.

Ad esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

si ha

$$c_{12} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) = 2$$

$$c_{31} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 = -1$$

A questo punto definiamo il prodotto di A e B come

$$C = AB = (c_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

La matrice C prodotto di A e B è quindi una matrice $m \times n$.

Nell caso dell'esempio precedente abbiamo

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 10 & -11 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ISBN 978-88-08-18166-4

Notiamo che in generale il numero di righe di AB è uguale al numero di righe di A e il numero di colonne di AB è uguale al numero di colonne di B.

Osserviamo anche che il prodotto di una matrice $m \times n$ e una matrice $n \times 1$ dà come risultato una matrice di $m \times 1$.

PROPOSIZIONE 1.2.1 *L'operazione di prodotto tra matrici gode della proprietà associativa, cioè $(AB)C = A(BC)$ ove A, B, C sono matrici con un numero di righe e colonne tale che i prodotti che compaiono nella formula siano definiti. Inoltre vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, cioè $A(B+C) = AB + AC$, purché le operazioni di somma e prodotto che compaiono nella formula siano definite.*

Dimostrazione. Le dimostrazioni sono un puro calcolo di applicazione della definizione. Mostreremo solo l'associatività del prodotto. Per comodità, indicheremo l'elemento di posto (i, j) di una generica matrice M con $(M)_{ij}$. Siano $A \in \mathrm{M}_{m,s}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{M}_{s,r}(\mathbb{R})$, $A \in \mathrm{M}_{r,n}(\mathbb{R})$. Osserviamo che:

$$(AB)_{iu} = \sum_{h=1}^{s} a_{ih}b_{hu}, \quad (BC)_{hj} = \sum_{u=1}^{r} b_{hu}c_{uj}$$

quindi:

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{u=1}^{r}(AB)_{iu}c_{uj} = \sum_{u=1}^{r}(\sum_{h=1}^{s} a_{ih}b_{hu})c_{uj} =$$

$$\sum_{u=1}^{r}\sum_{h=1}^{s} a_{ih}b_{hu}c_{uj} = \sum_{h=1}^{s}\sum_{u=1}^{r} a_{ih}b_{hu}c_{uj} =$$

$$\sum_{h=1}^{s} a_{ih}(\sum_{u=1}^{r} b_{hu}c_{uj}) = \sum_{h=1}^{s} a_{ih}(BC)_{hj} = (A(BC))_{ij}$$

La dimostrazione della distributività è analoga. ■

Si noti che l'operazione di prodotto tra matrici non gode della proprietà *commutativa*. Ad esempio se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

si ha che

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

 ISBN 978-88-08-18166-4

Addirittura se è definito il prodotto AB tra due matrici A e B, il prodotto BA potrebbe non essere neppure definito. Ad esempio se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mentre BA non è definito.

1.3 Matrici e sistemi lineari

Vediamo ora come sia possibile utilizzare le matrici e il prodotto righe per colonne per descrivere un sistema lineare.

Consideriamo un sistema lineare della forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Possiamo scrivere questo sistema in forma matriciale nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

quindi il sistema può essere riscritto utilizzando il prodotto righe per colonne, in questo modo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ISBN 978-88-08-18166-4

o, più sinteticamente, come

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

dove $A = (a_{ij})$ è la matrice $m \times n$ dei coefficienti delle incognite, $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è la colonna delle n incognite, e $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ è la colonna degli m termini noti. La matrice $A = (a_{ij})$ si chiama matrice *incompleta* associata al sistema, la matrice

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

si chiama matrice *completa* associata al sistema.

***Esempio* 1.3.1** Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$$

nelle incognite x_1, x_2, x_3. Allora la matrice incompleta e la matrice completa associate al sistema sono, rispettivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } (A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \sqrt{2} & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Quello di usare le matrici è semplicemente un modo più comodo di scrivere e trattare i sistemi lineari. Ogni riga della matrice completa associata a un sistema lineare equivale a un'equazione del sistema in cui vengono sottointese le incognite e i segni di somma e uguaglianza.

Definizione 1.3.2 Una matrice si dice *in forma a scala* (per righe) o, semplicemente, *a scala* se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(a) eventuali righe nulle si trovano in fondo alla matrice;

(b) il primo elemento non nullo di ogni riga (non nulla) si trova più a destra del primo elemento non nullo della riga precedente.

 ISBN 978-88-08-18166-4

Esempio **1.3.3** La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è una matrice in forma a scala (per righe) perché soddisfa le condizioni (a) e (b) della Definizione 1.3.2.

Al contrario, la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

non è in forma a scala perché il primo elemento non nullo della terza riga non si trova più a destra del primo elemento non nullo della seconda riga (ma sotto di esso).

Definizione 1.3.4 Sia A una matrice in forma a scala (per righe). Si chiama *pivot* di A il primo elemento non nullo di ogni riga (non nulla) di A. Si chiama *rango righe* di A e si indica con $\mathrm{rr}(A)$ il numero di righe non nulle di A o, equivalentemente, il numero dei suoi pivot.

Esempio **1.3.5** Data

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i pivot di A sono 1, -1, $\frac{1}{3}$, perciò $\mathrm{rr}(A) = 3$.

Osservazione **1.3.6** Sia $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ una matrice a scala. Per definizione di rango si ha

$$\mathrm{rr}(A) \leq m \tag{1.3}$$

Vale però anche la disuguaglianza

$$\mathrm{rr}(A) \leq n \tag{1.4}$$

Se $m \leq n$, (1.4) segue ovviamente da (1.3). Se $m > n$ è facile rendersi conto, disegnando una matrice a scala con un numero m di righe maggiore del numero n di colonne, che la proprietà (b) della Definizione 1.3.2 implica che il massimo numero di pivot di A è n.

ISBN 978-88-08-18166-4

Definizione 1.3.7 Il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ si dice *a scala* se la matrice A è in forma a scala.

Mostreremo di seguito come risolvere velocemente un sistema lineare a scala.

Esempio **1.3.8** Consideriamo il seguente sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

La matrice completa associata al sistema è:

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

che è in forma a scala e ha rango 4. Ovviamente anche la matrice incompleta A è in forma a scala e notiamo che anch'essa ha rango 4. Il fatto che la matrice A sia in forma a scala indica che in ogni equazione del sistema compare un'incognita che non compare nelle equazioni successive. Il sistema lineare può dunque essere facilmente risolto per sostituzioni successive dal basso, cioè a partire dall'ultima equazione e risalendo verso la prima: dalla quarta equazione abbiamo $x_4 = 1$; sostituendo $x_4 = 1$ nella terza equazione otteniamo $x_3 = x_4 = 1$. Sostituendo $x_3 = 1$ nella seconda equazione otteniamo $x_2 = 2 + 2x_3 = 2 + 2 = 4$. Infine, sostituendo $x_2 = 4$ e $x_3 = x_4 = 1$ nella prima equazione, otteniamo $x_1 = \frac{1}{4}(1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4) = \frac{1}{4}(1 - 8 - 3 - 4) = -\frac{7}{2}$. Il sistema assegnato ha dunque una sola soluzione: $(-\frac{7}{2}, 4, 1, 1)$.

Esempio **1.3.9** Consideriamo il sistema lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 ottenuto da quello dell'esempio precedente cancellando l'ultima equazione:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

 ISBN 978-88-08-18166-4

La matrice completa associata al sistema è:

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

che è in forma a scala e ha rango 3. Anche la matrice incompleta A è in forma a scala e anch'essa ha rango 3. Naturalmente la soluzione $(-\frac{7}{2}, 4, 1, 1)$, trovata nell'esempio precedente, è una soluzione anche di questo sistema, che quindi è senz'altro compatibile. Quante sono, tuttavia, in questo caso le soluzioni del sistema? Anche in questo caso possiamo procedere per sostituzioni successive dal basso perché, come prima, in ogni equazione compare un'incognita che non compare nelle equazioni successive. Dall'ultima equazione abbiamo $x_3 = x_4$. Sostituendo $x_3 = x_4$ nella seconda equazione, otteniamo $x_2 = 2 + 2x_3 = 2 + 2x_4$. Sostituendo x_2 e x_3 nella prima equazione otteniamo $x_1 = \frac{1}{4}(1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4) = \frac{1}{4}(1 - 4 - 4x_4 - 3x_4 - 4x_4) = \frac{1}{4}(-3 - 11x_4)$. Il sistema ha dunque infinite soluzioni della forma $(-2x_4, 2 + 2x_4, x_4, x_4)$ al variare di x_4 nell'insieme dei numeri reali.

Quanto illustrato negli Esempi 1.3.8, 1.3.9 è un fatto del tutto generale. Vale infatti la seguente proposizione:

Proposizione 1.3.10 *Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare a scala nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$. Allora:*

(a) il sistema ammette soluzioni se e solo se $\mathrm{rr}(A) = \mathrm{rr}(A|\underline{b})$;

(b) se $\mathrm{rr}(A) = \mathrm{rr}(A|\underline{b}) = n$ il sistema ammette una sola soluzione;

(c) se $\mathrm{rr}(A) = \mathrm{rr}(A|\underline{b}) = k < n$ il sistema ammette infinite soluzioni, che dipendono da $n - k$ variabili libere.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, cancellando la colonna $\underline{b}$ dalla matrice $(A|\underline{b})$, si ottiene ancora una matrice in forma a scala, quindi anche la matrice incompleta A associata al sistema è una matrice a scala. Inoltre, cancellando la colonna $(\underline{b})$ dalla matrice $(A|\underline{b})$, il numero di pivot può diminuire al più di 1. Più precisamente questo succede se e soltanto se la matrice A ha almeno una riga nulla, diciamo la i-esima, e l'elemento b_i è diverso da 0. In termini di equazioni questo equivale alla condizione $0 = b_i \neq 0$ che, evidentemente, non può essere soddisfatta. Pertanto se $\mathrm{rr}(A) \neq \mathrm{rr}(A|\underline{b})$, il sistema non ammette soluzioni.

ISBN 978-88-08-18166-4

Supponiamo ora che sia $\mathrm{rr}(A) = \mathrm{rr}(A|\underline{b}) = n$. Questo significa che il numero dei pivot, ossia il numero degli "scalini", coincide con il numero delle incognite, quindi il sistema è costituito esattamente da n equazioni, l'incognita x_1 compare solo nella prima equazione, x_2 solo nelle prime due equazioni, x_3 solo nelle prime tre e così via. In particolare l'ultima equazione del sistema contiene solo l' incognita x_n e quindi ne fissa il valore. Sostituendo tale valore nella penultima equazione si ottiene l'unico valore della variabile x_{n-1} e così via, procedendo per sostituzioni successive dal basso come nell'Esempio 1.3.8, si ottiene l'unica soluzione del sistema. Se, invece, $\mathrm{rr}(A) = \mathrm{rr}(A|\underline{b}) = k < n$ è possibile, procedendo per sostituzioni successive dal basso, esprimere le k variabili corrispondenti ai pivot delle righe non nulle in funzione delle altre $n - k$ che restano libere di variare nell'insieme dei numeri reali. Si ottengono così infinite soluzioni. ∎

***Esempio* 1.3.11** Risolviamo il seguente sistema lineare a scala nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 0 \end{cases}$$

La matrice completa associata al sistema è:

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Notiamo che $\mathrm{rr}(A) = \mathrm{rr}(A|\underline{b}) = 2$ quindi, per la proprietà (a) della Proposizione 1.3.10, il sistema ammette soluzioni. Dal momento che il numero delle variabili è $4 > 2$, per la proprietà (c) della Proposizione 1.3.10, il sistema ammette infinite soluzioni. In sostanza abbiamo 4 variabili e due condizioni su di esse, perciò due variabili restano libere di variare nell'insieme dei numeri reali e potremo esprimere due variabili in funzione delle altre due. Procedendo per sostituzioni successive dal basso abbiamo:

$$x_3 = -\frac{1}{2}x_4$$

$$x_1 = x_2 - x_3 + x_4 + 1 = x_2 + \frac{1}{2}x_4 + x_4 + 1 = x_2 + \frac{3}{2}x_4 + 1$$

Le infinite soluzioni del sistema sono pertanto della forma $(x_2 + \frac{3}{2}x_4 + 1,\ x_2,\ -\frac{1}{2}x_4,\ x_4)$, con $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$.

 ISBN 978-88-08-18166-4

Osserviamo che avremmo potuto decidere di esprimere la variabile x_4 in funzione della variabile x_3 ($x_4 = -2x_3$) e, ad esempio, la variabile x_2 in funzione delle variabili x_1 e x_3 ($x_2 = x_1 + 3x_3 - 1$). In altri termini, la scelta delle variabili "libere" non è obbligata. Tuttavia è sempre possibile scegliere come variabili libere quelle corrispondenti alle colonne della matrice A non contenenti pivot ed esprimere in funzione di queste le incognite corrispondenti alle colonne contenenti i pivot. Ad esempio, in questo caso i pivot, entrambi uguali a 1, si trovano sulla prima e sulla terza colonna di A e nella nostra prima scelta, la più naturale, abbiamo lasciato libere le variabili x_2 e x_4 ed espresso x_1 e x_3 in funzione di x_2 e x_4.

1.4 Algoritmo di Gauss

Abbiamo stabilito come risolvere un sistema lineare a scala. Cosa succede nel caso di un qualsiasi sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$? Sarebbe comodo poter ottenere un nuovo sistema lineare $A'\underline{x} = \underline{b}'$, questa volta a scala, equivalente al sistema di partenza, cioé avente le stesse soluzioni, in modo tale da poter calcolare le soluzioni di $A\underline{x} = \underline{b}$ risolvendo il sistema a scala $A'\underline{x} = \underline{b}'$. Questo è esattamente quello che faremo.

***Esempio* 1.4.1** I seguenti sistemi lineari nelle incognite x_1, x_2, sono equivalenti:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_2 = 1 \end{cases}$$

Si verifica, infatti, facilmente che l'unica soluzione di ciascuno dei due sistemi è: $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. Notiamo che la prima equazione è la stessa nei due sistemi e che la seconda equazione del secondo sistema può essere ottenuta dalla differenza tra la seconda e la prima equazione del primo sistema:

$$2^a\text{equazione} \to 2^a\text{equazione} - 1^a\text{equazione}.$$

Come si può passare da un sistema ad uno a esso equivalente? Ad esempio eseguendo le seguenti operazioni:

(a) scambio di due equazioni;

(b) moltiplicazione di un'equazione per un numero reale diverso da 0;

ISBN 978-88-08-18166-4

(c) sostituzione dell'equazione i-esima con la somma dell'equazione i-esima e della j-esima moltiplicata per un numero reale α qualsiasi. In sintesi:

$$i\text{-esima equazione} \longrightarrow i\text{-esima equazione} + \alpha(j\text{-esima equazione}).$$

È immediato verificare che le operazioni (a) e (b) non alterano le soluzioni del sistema. L' operazione (c) coinvolge soltanto la i-esima e la j-esima equazione del sistema, quindi basta osservare che i sistemi

$$\begin{cases} j\text{-esima equazione} \\ i\text{-esima equazione} \end{cases} \qquad \begin{cases} j\text{-esima equazione} \\ i\text{-esima equazione} + \alpha(j\text{-esima equazione}) \end{cases}$$

sono equivalenti, cioè hanno le stesse soluzioni.

Traduciamo ora le operazioni (a), (b) e (c) in termini matriciali: scambiare due equazioni del sistema equivale a scambiare due righe della matrice completa associata al sistema; moltiplicare una equazione per un numero reale diverso da 0 equivale a moltiplicare una riga della matrice completa associata al sistema per un numero reale diverso da 0, cioè moltiplicare per tale numero ogni elemento della riga; infine l'operazione (c) equivale a sostituire la riga i-esima della matrice completa associata al sistema con la somma della riga i-esima e della j-esima moltiplicata per un numero reale α. Spieghiamo un po' meglio che cosa si intende con tale somma: siano $(a_{i1} \dots a_{in}\, b_i)$ e $(a_{j1} \dots a_{jn}\, b_j)$ rispettivamente la i-esima e la j-esima riga della matrice $(A|\underline{b})$. Sommare la i-esima riga con la j-esima moltiplicata per un numero α, significa effettuare la somma coefficiente per coefficiente:

$$(a_{i1} \dots a_{in}\; b_i) + \alpha(a_{j1} \dots a_{jn}\; b_j) = (a_{i1} + \alpha a_{j1} \dots a_{in} + \alpha a_{jn}\; b_i + \alpha b_j)$$

In virtù dell'importanza che tali operazioni avranno in seguito, diamo ad esse un nome:

Definizione 1.4.2 Data una matrice A si chiamano *operazioni elementari* sulle righe di A le seguenti operazioni:

(a) scambio di due righe;

(b) moltiplicazione di una riga per un numero reale diverso da 0;

(c) sostituzione della riga i-esima con la somma della riga i-esima e della j-esima moltiplicata per un numero reale α qualsiasi.

***Osservazione* 1.4.3** Osserviamo che nell'operazione elementare (c) non richiediamo che il numero α sia non nullo. In effetti se $\alpha = 0$ l'operazione (c) equivale a lasciare la riga i-esima inalterata.

Data una qualsiasi matrice $A = (a_{ij})$ è possibile trasformare A in una matrice a scala attraverso operazioni elementari sulle righe di A. Tale procedimento è noto come *riduzione di Gauss* e l'algoritmo che si utilizza si chiama *algoritmo di Gauss* e funziona nel modo seguente.

1) Se $a_{11} = 0$ si scambia la prima riga di A con una riga in cui il primo elemento è non nullo. Indichiamo con a tale elemento non nullo. Se il primo elemento di ogni riga di A è nullo, si va direttamente al punto 3.

2) Si controllano una dopo l'altra tutte le righe tranne la prima. Se il primo elemento di una riga è nullo si lascia quella riga inalterata. Se il primo elemento di una riga, diciamo la i-esima ($i > 1$), è uguale a $b \neq 0$, si sostituisce la riga i-esima con la somma della riga i-esima e della prima riga moltiplicata per $-\frac{b}{a}$.

3) A questo punto tutti gli elementi della prima colonna, tranne eventualmente il primo, sono nulli. Si considera dunque la matrice che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna della matrice ottenuta e si ricomincia dal punto 1.

***Esempio* 1.4.4** Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Utilizziamo l'algoritmo di Gauss per ridurre A a scala.

Dal momento che l'elemento di posto $(1, 1)$ è nullo, scambiamo la prima con la seconda riga, ottenendo la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il primo elemento della seconda riga della matrice ottenuta è 0, perciò lasciamo questa riga inalterata. Il primo elemento della terza riga, invece, è 2, quindi sostituiamo la terza riga con la somma della terza riga e della prima moltiplicata per -2. Otteniamo così la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora ogni elemento della prima colonna tranne il primo è uguale a 0. Passiamo a considerare la matrice che otteniamo cancellando la prima riga e la prima colonna della matrice ottenuta:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Applichiamo un'altra volta l'algoritmo di Gauss: il primo elemento della prima riga della matrice rimasta, questa volta, è diverso da 0, perciò lasciamo inalterata la prima riga. Ora sostituiamo la seconda riga con la somma della seconda e della prima moltiplicata per 5, ottenendo:

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo così ottenuto la matrice a scala:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

A questo punto siamo in grado di risolvere qualsiasi sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$. La matrice completa associata al sistema è $(A|\underline{b})$. Utilizzando l'algoritmo di Gauss possiamo "ridurre" $(A|\underline{b})$ a scala ottenendo una matrice $(A'|\underline{b}')$. Il sistema lineare $A'\underline{x} = \underline{b}'$ è equivalente al sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ dal momento che ogni operazione elementare sulle righe di $(A|\underline{b})$ equivale a un'operazione sulle equazioni del sistema che ne preserva le soluzioni. Quindi, per trovare le soluzioni del sistema di partenza, risolveremo il sistema a scala $A'\underline{x} = \underline{b}'$ tenendo conto della Proposizione 1.3.10. Notiamo in particolare che, in conseguenza del ragionamento appena illustrato e del contenuto della Proposizione 1.3.10, dato un qualsiasi sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ a coefficienti reali *solo una* delle seguenti situazioni si può presentare:

 ISBN 978-88-08-18166-4

1) il sistema *non* ha soluzioni;

2) il sistema ha *una sola* soluzione;

3) il sistema ha *infinite* soluzioni.

Questo significa che non esiste alcun sistema lineare a coefficienti reali con un numero finito di soluzioni strettamente più grande di 1. Nel momento in cui un sistema lineare a coefficienti reali ha 2 soluzioni allora ne ha infinite.

***Osservazione* 1.4.5** Le mosse dell'algoritmo di Gauss non sono necessariamente obbligate. Nell'Esempio 1.4.4, ad esempio, anziché scambiare la prima con la seconda riga, avremmo potuto scambiare la prima con la terza riga. In questo modo, portando a termine l'algoritmo, avremmo ottenuto una matrice a scala diversa dalla matrice B. Dal punto di vista dei sistemi lineari questo significa ottenere sistemi a scala diversi, ma tutti equivalenti al sistema di partenza (e quindi equivalenti tra loro).

***Esempio* 1.4.6** Risolvere il seguente sistema lineare di quattro equazioni nelle cinque incognite u, v, w, x, y:

$$\begin{cases} u + 2v + 3w + x + y = 4 \\ u + 2v + 3w + 2x + 3y = -2 \\ u + v + w + x + y = -2 \\ -3u - 5v - 7w - 4x - 5y = 0 \end{cases}$$

La matrice completa associata al sistema è:

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & -7 & -4 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Si tratta ora di ridurre la matrice $(A|\underline{b})$ in forma a scala utilizzando l'algoritmo di Gauss e, successivamente, di risolvere il sistema lineare associato alla matrice ridotta.

In questo primo esempio riportiamo i passi dell'algoritmo di Gauss descrivendo contemporaneamente le operazioni sulle equazioni del sistema che equivalgono ad ogni passo. Tuttavia, poiché il vantaggio dell'algoritmo di Gauss consiste proprio nel poter dimenticare equazioni e incognite concentrandosi solo sulle matrici, questa descrizione è puramente esplicativa.

ISBN 978-88-08-18166-4

L'elemento di posto $(1,1)$ è non nullo, perciò lasciamo la prima riga inalterata. Dopodiché effettuiamo le seguenti operazioni elementari sulle righe di $(A|\underline{b})$:

- 2^a riga $\to$ 2^a riga $-$ 1^a riga;

- 3^a riga $\to$ 3^a riga $-$ 1^a riga;

- 4^a riga $\to$ 4^a riga $+$ $3(1^a$ riga$)$.

Otteniamo così la seguente matrice (e l'equivalente sistema lineare):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 12 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} u + 2v + 3w + x + y = 4 \\ x + 2y = -6 \\ -v - 2w = -6 \\ v + 2w - x - 2y = 12 \end{cases}$$

Ora scambiamo la seconda con la quarta riga:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} u + 2v + 3w + x + y = 4 \\ v + 2w - x - 2y = 12 \\ -v - 2w = -6 \\ x + 2y = -6 \end{cases}$$

Ora sostituiamo alla terza riga la somma della terza riga e della seconda:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} u + 2v + 3w + x + y = 4 \\ v + 2w - x - 2y = 12 \\ -x - 2y = 6 \\ x + 2y = -6 \end{cases}$$

Infine sostituiamo alla quarta riga la somma della quarta e della terza:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} u + 2v + 3w + x + y = 4 \\ v + 2w - x - 2y = 12 \\ -x - 2y = 6 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Il sistema di partenza è equivalente al sistema a scala che abbiamo ottenuto, in cui l'ultima equazione è diventata un'identità. Il rango della matrice incompleta e il rango della matrice completa della matrice a scala ottenuta coincidono e sono uguali a 3. Il numero delle incognite del

 ISBN 978-88-08-18166-4

sistema è 5, quindi il sistema ammette infinite soluzioni che dipenderanno da $5-3=2$ variabili libere. Risolviamo il sistema per sostituzioni successive dal basso: usando la terza equazione possiamo esprimere la variabile x in funzione di y:

$$x=-2y-6$$

Nella seconda equazione sostituiamo x con la sua espressione in funzione di y e ricaviamo v in funzione di w e di y:

$$v=-2w+6$$

Infine nella prima equazione sostituiamo x con la sua espressione in funzione di y, v con la sua espressione in funzione di w e ricaviamo u in funzione di w e di y:

$$u=-2v-3w-x-y+4=-2(-2w+6)-3w-(-2y-6)-y+4=w+y-2$$

Dunque il sistema ha infinite soluzioni del tipo $(w+y-2,-2w+6,w,-2y-6,y)$ che dipendono da due variabili libere $w,y\in\mathbb{R}$.

1.5 Esercizi svolti

1.5.1 Si risolva il seguente sistema lineare nelle quattro incognite x,y,z,t:

$$\begin{cases} x-2y=5 \\ -x+2y-3z=-2 \\ -2y+3z-4t=-11 \\ -3z+4t=15 \end{cases}$$

Svolgimento. La matrice completa associata al sistema è:

$$(A|\underline{b})=\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 15 \end{array}\right)$$

Riduciamo la matrice $(A|\underline{b})$ in forma a scala utilizzando l'algoritmo di Gauss:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 15 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 15 \end{array}\right)$$

ISBN 978-88-08-18166-4

$$\rightarrow\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right)=(A'|\underline{b}')$$

La matrice a scala ottenuta è la matrice completa associata al sistema lineare:

$$\begin{cases} x-2y=5 \\ -2y+3z-4t=-11 \\ -3z=3 \\ 4t=12 \end{cases}$$

Notiamo che $\mathrm{rr}(A')=\mathrm{rr}(A'|\underline{b}')=4=$ numero incognite. Il sistema di partenza ammette dunque un'unica soluzione che possiamo calcolare procedendo per sostituzioni successive dal basso: dalla quarta equazione abbiamo

$$t=3$$

e dalla terza equazione abbiamo

$$z=-1$$

sostituendo questi valori di t e di z nella seconda equazione otteniamo

$$y=-2$$

infine, sostituendo i valori di t,z,y nella prima equazione otteniamo

$$x=1$$

Dunque il sistema ha come unica soluzione la quaterna $(1,-2,-1,3)$.

1.5.2 Si determinino le soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t, al variare del parametro reale α:

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-z-t=-1 \\ x+2y+(2\alpha+1)z+3t=2\alpha-1 \\ 3x+4y+(3\alpha+2)z+(\alpha+5)t=3\alpha-1 \end{cases}$$

Svolgimento. In questo esercizio si ha a che fare con un sistema lineare in cui compare un parametro reale α. Questo significa che al variare