Esercizi commentati sui numeri complessi

In queste pagine trovate alcuni esercizi sui numeri complessi. Alcuni di questi esercizi son stati svolti durante le lezioni. Altri son stati aggiunti tenendo conto delle difficoltà emerse e/o dalle domande ricevute durante le lezioni. Ho cercato di essere quanto più dettagliato possibile. Lo studente dovrebbe rivederli con calma e farne altri simili in modo da impratichirsi con le principali tecniche. Avendo prodotto questo materiale molto rapidamente è probabile che ci siano dei piccoli errori. Sarò grato a chiunque me li segnali. Purtroppo non ho il tempo materiale per scriverli in Latex e dovrete accontentarvi della mia (brutta) calligrafia. Riporto le principali formule/definizioni.

1 Formulario

- Forma algebrica dei numeri complessi $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$
- Forma trigonometrica dei numeri complessi $\rho\,(cos\theta + i\sin\theta)$, dove ρ è il modulo del numero complesso e θ la sua anomalia (o argomento) L'argomento è definito a meno di multipli interi di 2π.
- Prodotto di n numeri complessi: Considerati gli n numeri complessi $z_k = \rho_k\,(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ (con $k = 1, 2, \ldots, n$) si ha

  $$z_1 z_2 \ldots z_n = \rho_1\rho_2\ldots\rho_n\,(\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n))$$

- Dati i due numeri complessi $z_1 = \rho_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2\,(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ si ha $\dfrac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\,(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$
- Formula di De Moivre: Dato $z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ si ha $z^n = \rho^n\,(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

- z è detta radice n-esima del numero complesso (assegnato) w se si ha $z^n = w$.

- Vale il seguente:

  Theorem 1.1 *Sia $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ e $n \geq 1$. Esistono esattamente n radici n-esime (complesse) di w. Posto $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$ tali radici si ottengono dalla formula:*

  $$z_k = |w|^{\frac{1}{n}}\left(\cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta + 2k\pi}{n})\right), \textit{con } k = 0, 1, 2 \ldots, n$$

Esercizi

1) Eseguire le operazioni sotto indicate fra i numeri complessi

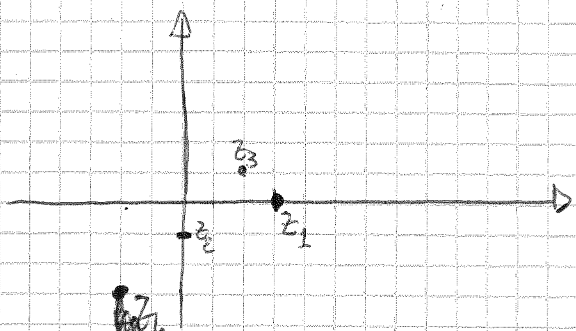
- $(3+i2)+(7+i3) = (7+3)+i(2+3) = 10+i5$

- $(1+i3)\cdot(3-i2) = (3-i^2 6)+i(3\cdot 3-2\cdot 1) = \cancel{\ldots}$
  $= (3+6)+i(9-2) = 9+i7$

- $\dfrac{2+i}{1+i} = \dfrac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{(2+1)+i(1-2)}{2} = \dfrac{3-i}{2}$

2) Rappresentare nel piano complesso i seguenti numeri complessi

$z_1 = 3 \quad , \quad z_2 = -i \quad , \quad z_3 = 2+i \quad , \quad z_4 = -2-3i$



N.B. A volte è comodo rappresentare i numeri complessi con "frecce" come se fossero vettori (torneremo su questa rappresentazione quando studieremo i vettori)

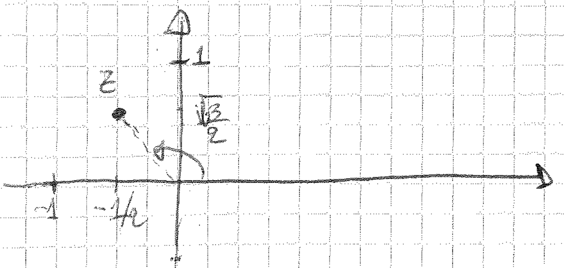
3) Calcolare il modulo e l'argomento dei numeri complessi

(a) $1+i$, (b) $-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}$, (c) $\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}$

(a) $\rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\theta = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

(N.B. l'angolo $\theta = \frac{5}{4}\pi$ va escluso perché esso corrisponderebbe al numero $z = -(1+i)$!!)

b)

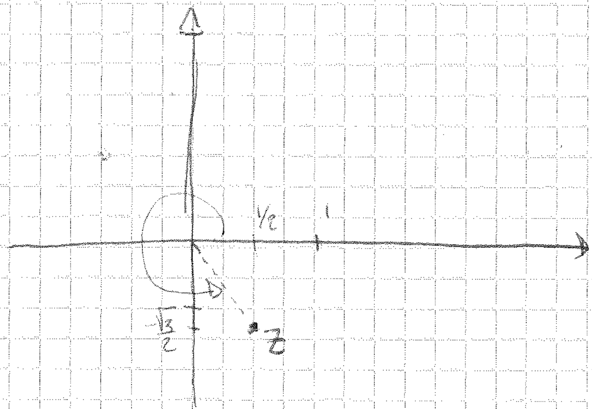


$z = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$

$\rho = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, $\quad \mathrm{tg}\,\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = -\sqrt{3} \implies \theta = \frac{2}{3}\pi$

---

c) $\quad z = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$



$\rho = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$\mathrm{tg}\,\theta = -\sqrt{3} \implies \theta = \frac{5}{3}\pi$

Osservazione 1: Riflettete sui diversi valori assegnati all'angolo θ nei due casi (b) e (c) !!

Osservazione 2:

In tutti e tre gli esempi (a), (b) e (c) θ si intende determinato a meno di multipli interi di 2π – Si sarebbe potuto scrivere: ~~anche~~

(a) $\rho = \sqrt{2}$, $\quad \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

(b) $\rho = 1$, $\quad \theta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$

(c) $\rho = 1$, $\quad \theta = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$

4) Determinare la forma algebrica dei seguenti numeri

a) $(1-i)^6$ (b) $(1+i)^8$

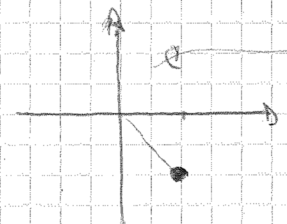
Per risolvere questo tipo di esercizi occorre procedere nel seguente modo.

- Scrivere la forma trigonometrica relativa al numero di cui si vuol calcolare la potenza
- Applicare la formula di De Moivre
- Scrivere la forma algebrica corrispondente

a) Si voglia calcolare $(1-i)^6$.

~~Esprimiamo di~~ Esprimiamo $1-i$ in forma trigonometrica (vedi esercizi precedenti).

Si ha che $1-i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $-\frac{\pi}{4}$ ($tg\,\theta=-1$, $\theta=\frac{3\pi}{4}$ va escluso!)



Quindi $1-i=\sqrt{2}^{6}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Per cui $(1-i)^6=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6\cos\left(-\frac{6}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{6}{4}\pi\right)=$

$=8\left[\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)\right]=8\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=8i$

b) $(1+i)^8$

Poiché $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$(1+i)^8=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^8\left(\cos\left(\frac{8}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{8}{4}\pi\right)\right)=2^4(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=16$

5) Determinare le radici cubiche del numero $z = 1$

Avendosi $\rho = 1$, $\theta = 0$

le radici cubiche cercate si ottengono dalla formula contenuta nel Theorem (1.1) del formulario come segue

$$z_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}k\pi\right)\right), \quad k = 0, 1, 2$$

Più esplicitamente

$$z_0 = 1, \quad z_1 = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

6) Determinare la radice quadrata di $-4i$

si ha $-4i = 4\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$

Applicando la formula del Theorem 1.1 del formulario si trova

$$z_k = \sqrt{4}\left(\cos\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{2}\right)\right), \quad k = 0, 1$$

Più esplicitamente:

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}(1-i)$$

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi + \pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi + \pi\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right)$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}(-1+i)$$

<u>Osservazione</u> NOTARE come z_0 e z_1 sono l'uno l'opposto dell'altro proprietà sempre vera: ~~nel caso del binomio o~~ comunque sia dato $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ le sue radici (complesse) quadrate sono due numeri di cui uno è l'opposto dell'altro!

6) Ricavare le formule di duplicazione del seno e del coseno, usando la formula di De Moivre.

Sappiamo che se $z=(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow \boxed{z^2=\cos 2\theta + i\sin 2\theta}$ ⊙

D'altro canto
$$z^2 = (\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i(2\sin\theta\cos\theta)$$

cioè $\boxed{z^2 = (\cos^2\theta-\sin^2\theta)+i(2\sin\theta\cos\theta)}$ ▽

Ovviamente ⊙ e ▽ devono essere uguali. Poiché due numeri complessi sono uguali se e solo se hanno la stessa parte reale e stessa parte immaginaria dovrà risultare

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

Relazioni ben note dalle scuole superiori.
La tecnica si generalizza facilmente facendo ricorso ~~all'binom~~ alla formula del binomio di Newton come mostrato nell'esercizio sotto (si chiede allo studente di completare i calcoli da solo)

7) Ricavare la formula $\cos 3\theta$ in termini di potenze di $\sin\theta$ e $\cos\theta$

Posto $z = \cos\theta + i\sin\theta$ dalla formula di De Moivre

$$\boxed{z^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta} \quad \boxed{\cdot}$$

Ma $z^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} (\cos\theta)^{3-k} (\overset{i\sin\theta}{i\sin\theta})^k$

$$\boxed{z^3 = \binom{3}{0}\cos^3\theta + i\binom{3}{1}\cos^2\theta\sin\theta - \binom{3}{2}\cos\theta\sin^2\theta - i\binom{3}{3}\sin^3\theta} \quad \boxed{\cdot\cdot}$$

Ora basta eguagliare le parti reali di $\boxed{\cdot}$ e $\boxed{\cdot\cdot}$ per concludere l'esercizio!