A titolo di esempio verifichiamo che

(46.8) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n (n+5)}{3n^2+1} = 0;$$

infatti si tratta del limite del prodotto della successione limitata $a_n = (-1)^n$ per la successione infinitesima

(46.9) $$b_n = \frac{n+5}{3n^2+1} = \frac{1/n + 5/n^2}{3 + 1/n^2}.$$

Come ulteriore esempio verifichiamo che

(46.10) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n} = 0$$

(il lettore non confonda questo limite con quello proposto in (47.17), uguale a 1; nel limite in (47.17) la successione a_n converge a zero, mentre la successione in considerazione in (46.10) è sen a_n/a_n, con $a_n = n \to +\infty$).

Il limite in (46.10) è zero perché limite del prodotto della successione limitata $a_n = \operatorname{sen} n$ ($|a_n| = |\operatorname{sen} n| \le 1, \forall n \in \mathbf{N}$) per la successione infinitesima $b_n = 1/n$.

47. Alcuni limiti notevoli

In questo paragrafo esaminiamo alcuni esempi di limiti particolarmente importanti. Cominciamo con ($a \in \mathbf{R}$ fissato):

(47.1) $$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & se \quad a > 1 \\ 1 & se \quad a = 1 \\ 0 & se \quad -1 < a < 1 \\ \textit{non esiste} & se \quad a \le -1 \end{cases}$$

Se $a > 1$ è possibile utilizzare la disuguaglianza di Bernoulli (12.5):

(47.2) $$a^n \ge 1 + n(a-1).$$

Dato che $a > 1$, il secondo membro tende a $+\infty$ se $n \to +\infty$; per il teorema di confronto (45.9) anche $a^n \to +\infty$. I casi $a = 1$ e $a = 0$ sono ovvi. Se a è diverso da zero e compreso tra -1, 1 ($0 < |a| < 1$), risulta $1/|a| > 1$, e quindi dal caso già trattato otteniamo:

(47.3) $$\lim_{n\to+\infty} |a^n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1/|a|)^n} = 0.$$

Se $a = -1$ si riottiene il limite (41.18). Se infine $a < -1$, si vede che la successione con esponenti pari $a^{2k} \to +\infty$, mentre la successione con esponenti dispari $a^{2k+1} \to -\infty$ per $k \to +\infty$. Perciò non esiste il limite per $n \to +\infty$ di a^n. Si noti che invece esiste, ed è uguale a $+\infty$, il limite di $|a^n|$, se $a < -1$; infatti si ottiene la successione $|a^n|$, che ha per base $|a| > 1$.

Proviamo ora che, se a è un numero reale positivo, risulta

(47.4) $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

Notiamo preliminarmente come sia facile ricordare il limite (47.4) per mezzo dei passaggi: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \to a^0 = 1$.

Dimostrazione della (47.4): nel caso $a \ge 1$ si ha $\sqrt[n]{a} \ge 1$. Poniamo $b_n = \sqrt[n]{a} - 1$; risulta $b_n \ge 0$ e inoltre, sempre per la disuguaglianza di Bernoulli:

(47.5) $$a = (1 + b_n)^n \ge 1 + n\, b_n .$$

Perciò

(47.6) $$0 \le b_n \le (a-1)/n.$$

Dal teorema dei carabinieri segue che $b_n \to 0$, cioè che $\sqrt[n]{a} \to 1$. Se $0 < a < 1$, allora $1/a > 1$ e quindi, per quanto già dimostrato,

(47.7) $$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} \to 1.$$

Dimostriamo ora che, se $b \in \mathbf{R}$, risulta

(47.8) $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1.$$

Esaminiamo preliminarmente il caso $b = 1/2$. Procedendo come fatto in precedenza, poniamo $b_n = \sqrt[n]{n^{1/2}} - 1 \ge 0$. Utilizzando ancora la disuguaglianza di Bernoulli, otteniamo

(47.9) $$\sqrt{n} = (1 + b_n)^n \ge 1 + n\, b_n .$$

Perciò

(47.10) $$0 \le b_n \le \frac{\sqrt{n} - 1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \to 0.$$

Quindi $b_n \to 0$, cioè $\sqrt[n]{n^{1/2}} = n^{1/(2n)} \to 1$.

Alcuni quesiti per il lettore: perché si è scelto il valore $b = 1/2$? La dimostrazione proposta non funziona se si sceglie $b = 1$; perché? Quali altri valori di b, oltre $b = 1/2$, possono essere scelti in modo che la dimostrazione funzioni?

Consideriamo ora il caso in cui l'esponente $b \in \mathbf{Z}$. In tal caso $\sqrt[n]{n^b} = (\sqrt[n]{n^{1/2}})^{2b} \to 1^{2b} = 1$. Per trattare il caso generale $b \in \mathbf{R}$, introduciamo la funzione *parte intera* di x:

(47.11) $[x]$ = *il più grande intero minore od uguale ad* x.

Se $b \in \mathbf{R}$, abbiamo $[b] \le b < [b] + 1$, e quindi

(47.12) $$\sqrt[n]{n^{[b]}} \le \sqrt[n]{n^b} \le \sqrt[n]{n^{[b]+1}} .$$

Ancora, per il teorema dei carabinieri, si ottiene la tesi (47.8).

Esaminiamo ora tre limiti relativi alle funzioni trigonometriche. I primi due sono:

(47.13) $$a_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sen } a_n \to 0;$$

(47.14) $$a_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \cos a_n \to 1.$$

Ad esempio sen $(1/n) \to 0$, cos $(1/n) \to 1$, perché $1/n \to 0$.

Dimostrazione della (47.13): dato che a_n converge a zero, per la definizione di limite esiste un indice ν per cui $|a_n|<\pi/2$ per ogni $n>\nu$. Per tali valori di n, utilizzando la disuguaglianza (10.8), otteniamo

(47.15) $$0 \le |\text{sen } a_n| = \text{sen } |a_n| \le |a_n|.$$

Per la proposizione del paragrafo precedente $|a_n|\to 0$; per il teorema dei carabinieri, $|\text{sen } a_n| \to 0$. Infine, ancora per la proposizione del paragrafo precedente sen $a_n \to 0$.

Dimostrazione della (47.14): si perviene al risultato dalla (47.13), utilizzando la relazione $\cos x = \pm \sqrt{1 - \text{sen}^2 x}$. Allo scopo di stabilire il segno nella relazione precedente, indichiamo con ν l'indice tale che risulti $-\pi/2 \le a_n \le \pi/2$ per ogni $n > \nu$ (ν esiste per la definizione di limite, dato che $a_n \to 0$). Per tali valori di n risulta $\cos a_n \ge 0$ e quindi

(47.16) $$\cos a_n = \sqrt{1 - \text{sen}^2 a_n}\,, \qquad \forall n > \nu.$$

Avendo già provato che sen $a_n \to 0$, ne segue che $b_n = 1 - \text{sen}^2 a_n \to 1$; la tesi è infine conseguenza del fatto che $\sqrt{b_n} \to \sqrt{1} = 1$.

Il terzo limite di funzione trigonometrica che prendiamo in considerazione è:

(47.17) $$a_n \to 0,\ a_n \ne 0\ \forall\, n \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{sen } a_n}{a_n} \to 1.$$

Notiamo che, dato che $a_n \to 0$, $(\text{sen } a_n)/a_n$ è una forma indeterminata. Cominciamo col dimostrare che

(47.18) $$0<|x|< \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1 .$$

Infatti, se x è positivo, dalla (10.8) si ottiene

$$\text{sen } x < x < \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

da cui, dividendo per sen x (che è positivo) e prendendo gli inversi, si ha

(47.19) $$\cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1.$$

Se invece x è negativo, applicando a $-x$ la (47.19) si ottiene

$$\cos x = \cos(-x) < \frac{\text{sen }(-x)}{-x} = \frac{\text{sen } x}{x} < 1;$$

dunque la (47.19) vale anche se x è negativo e la (47.18) è dimostrata.

Data che $a_n\to 0$, per la definizione di limite esiste un indice ν tale che $|a_n|<\pi/2$ per ogni $n>\nu$. Dalla (47.18) si ottiene

$$\cos a_n < \frac{\text{sen } a_n}{a_n} < 1, \qquad \forall\, n > \nu.$$

Per $n \to +\infty$, $\cos a_n \to 1$. La tesi (47.17) discende quindi dal teorema dei carabinieri.

Applichiamo il risultato appena dimostrato per concludere l'argomento del paragrafo 40, cioè per provare che l'area del cerchio di raggio 1 è uguale a π. Ricordiamo che, dato un cerchio di raggio 1, per definizione π è la lunghezza della semicirconferenza, mentre l'area del cerchio è il limite, per $n \to +\infty$, delle aree dei poligoni regolari di n lati inscritti. In base alla (40.2) si ottiene

(47.20) $$\text{area del cerchio di raggio } 1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2}\ \text{sen}\ \frac{2\pi}{n} .$$

Dato che, per $n \to +\infty$, la successione $2\pi/n$ tende a zero, siamo nella situazione del limite notevole (47.17) e quindi

(47.21) $$\text{area del cerchio di raggio } 1 = \lim_{n\to+\infty} \pi\, \frac{\text{sen }(2\pi/n)}{2\pi/n} = \pi.$$