$$(45.8) \qquad a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon.$$

Perciò $|c_n - a| < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$, come volevasi dimostrare.

Valgono analoghi teoremi di confronto anche per i limiti infiniti:

$$(45.9) \qquad a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n \to +\infty \quad \Rightarrow b_n \to +\infty$$

$$(45.10) \qquad a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad b_n \to -\infty \quad \Rightarrow \quad a_n \to -\infty .$$

Dimostriamo la (45.9) (la prova della (45.10) è analoga): per ipotesi $a_n \to +\infty$ che, per la definizione di limite (41.20), significa:

$$(45.11) \qquad \forall M > 0, \exists\ \nu: \ a_n > M, \qquad \forall n > \nu.$$

Dato che $b_n \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, si ottiene la tesi

$$(45.12) \qquad b_n \geq a_n > M, \qquad \forall n > \nu.$$

46. Altre proprietà dei limiti di successioni

Riportiamo in questo paragrafo due ulteriori proprietà dei limiti di successioni; in particolare la seconda, enunciata sotto forma di teorema, è importante per le applicazioni.

PROPOSIZIONE. — a_n *converge a zero se e soltanto se* $|a_n|$ *converge a zero.*

Dimostrazione: posto $b_n = |a_n|$, in base alla definizione (41.9) b_n converge a zero se e solo se

$$(46.1) \qquad \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \nu: |b_n| < \varepsilon, \qquad \forall n > \nu.$$

Dato che

$$(46.2) \qquad |b_n| = ||a_n|| = |a_n|, \qquad \forall n \in \mathbf{N},$$

la (46.1) è equivalente alla convergenza a zero della successione a_n.

Si noti che, nella proposizione precedente, è importante considerare non solo successioni convergenti, ma più in particolare successioni *convergenti a zero*. Ad esempio, se $a_n = (-1)^n$, allora a_n non è convergente, mentre $b_n = |a_n|$ è la successione costante $b_n = 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$, che ovviamente converge ad 1.

Ricordiamo che una successione a_n è *limitata* se esiste un numero $M > 0$ tale che

$$(46.3) \qquad |a_n| \leq M, \qquad \forall\ n \in \mathbf{N}.$$

Ricordiamo inoltre che una successione che converge a zero si dice *infinitesima.*

TEOREMA DEL LIMITE DEL PRODOTTO DI UNA SUCCESSIONE LIMITATA PER UNA INFINITESIMA. — *Se* a_n *è una successione limitata e* b_n *è una successione che converge a zero, allora la successione prodotto* $a_n \cdot b_n$ *converge a zero.*

Dimostrazione (*primo metodo*): per l'ipotesi (46.3) si ha

$$(46.4) \qquad |a_n\, b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |b_n|, \qquad \forall n \in \mathbf{N},$$

che, per la proprietà (8.9) del valore assoluto, equivale a

$$(46.5) \qquad -M \cdot |b_n| \leq a_n \cdot b_n \leq M \cdot |b_n|, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Dato che per ipotesi $b_n \to 0$, per la proposizione precedente anche la successione $|b_n|$ converge a zero. Per il teorema dei carabinieri, dalla (46.5) si deduce infine che $a_n \cdot b_n \to 0$.

Dimostrazione (*secondo metodo*): per la definizione di limite si ha:

$$(46.6) \qquad \forall \varepsilon > 0, \exists \nu: |b_n| < \varepsilon, \qquad \forall n > \nu.$$

Dall'ipotesi di limitatezza (46.3) si ottiene poi

$$(46.7) \qquad |a_n\, b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |b_n| < M\varepsilon, \qquad \forall n > \nu,$$

che equivale (si veda la (41.10)) al fatto che la successione prodotto $a_n \cdot b_n$ converge a zero.