Soluzione Prova Scritta di Meccanica 1 del 23 Aprile 2014

Esercizio 1.

a. Il vettore velocità è:

$$\boldsymbol{v} = (3(1-\cos(t)),\ 3\sin(t),\ 0).$$

Per quanto riguarda il modulo della velocità si ottiene facilmente:

$$|\boldsymbol{v}| = 3\sqrt{(1-\cos(t))^2+\sin(t)^2} = 3\sqrt{2(1-\cos(t))} = 6\sqrt{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = 6\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|,$$

e poichè $t \in [0, 2\pi]$, si trova $|\boldsymbol{v}| = 6\sin\left(\frac{t}{2}\right)$

b.

$$l = \int_0^{2\pi} 6\sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 24.$$

c. Per $t \in [0, 2\pi]$, si ha $s(t) = \int_0^t 6\sin\left(\frac{u}{2}\right) du = 12(1-\cos\left(\frac{t}{2}\right))$, cioè

$$s = -12(\cos\left(\frac{t}{2}\right)-1),\quad \frac{ds}{dt} = 6\sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

Si trova facilmente

$$\boldsymbol{t}(s) = \frac{d\boldsymbol{t}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}(1-\cos(t), \sin(t), 0).$$

Ricordando che: $1-\cos(t) = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$ e $\sin(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$, si ottiene

$$\boldsymbol{t}(s) = \left(\sin\left(\frac{t}{2}\right), \cos\left(\frac{t}{2}\right), 0\right).$$

Analogamente,

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{t}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{12\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right), -\sin\left(\frac{t}{2}\right), 0\right)$$

da cui si ricava subito $\left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right| = \dfrac{1}{12\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ e il versore normale è quindi

$$\boldsymbol{n}(s) = \left(\cos\left(\frac{t}{2}\right), -\sin\left(\frac{t}{2}\right), 0\right).$$

Si trova subito che il vettore binormale è $\boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{t}(s) \wedge \boldsymbol{n}(s) = \boldsymbol{k}$ essendo $\boldsymbol{k}$ il versore dell'asse z.

d. I calcoli svolti nel punto precedente mostrano che

$$k(s) = \left| \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} \right| = \frac{1}{12 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

La torsione è nulla essendo la curva piana (giace nel piano $z = 0$). A tale conclusione si può pervenire anche derivando il vettore binormale e tenendo conto che, per le formule di Frenet deve essere $\frac{d\boldsymbol{b}(s)}{ds} = \tau \boldsymbol{n}(s)$ e quest'ultima equazione, essendo $\frac{d\boldsymbol{b}(s)}{ds} = \vec{0}$, comporta $\tau = 0$.