Soluzione (traccia) del 27/06/2016

a)

$A = (2l \sin\theta,\ 2l \cos\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi)$

$G = (l \sin\theta,\ l \cos\theta)$

$P = (\xi, 0)$

$$U(\xi, \theta) = mg\, l \cos\theta - \frac{k}{2}\left(\xi^2 - 4l\xi \sin\theta + 4l^2\right) + \text{cost.}$$

1) Configurazioni di equilibrio:

I) $\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ \xi = 0 \end{cases}$, II) $\begin{cases} \theta = \pi \\ \xi = 0 \end{cases}$

Inoltre $\boxed{\text{per } k > \frac{mg}{4l}}$

si hanno anche le due configurazioni

III) $\begin{cases} \theta = \theta_3 \\ \xi = 2l \sin\theta_3 \end{cases}$ ; IV) $\begin{cases} \theta = \theta_4 \\ \xi = 2l \sin\theta_4 \end{cases}$

con $\theta_3 = \arccos\left(\frac{mg}{4l}\right)$, e $\theta_4 = 2\pi - \theta_3$

Per $k = \frac{mg}{2l} > \frac{mg}{4l}$ si hanno quindi quattro configurazioni

Le configurazioni III) e IV) "diventano"

$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{3} \\ \xi = \sqrt{3}\, l \end{cases}$ , $\begin{cases} \theta = \frac{5}{3}\pi \\ \xi = -\sqrt{3}\, l \end{cases}$

2) Stabilità b)

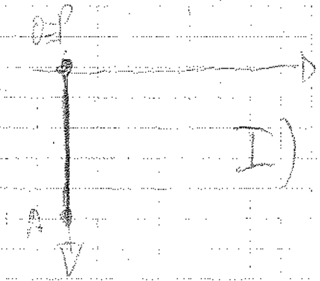
$$H(\xi,\theta)=\begin{vmatrix} -\frac{mg}{2l} & mg\cos\theta \\ mg\cos\theta & -mgl\cos\theta - mg\,\xi\sin\theta \end{vmatrix}$$

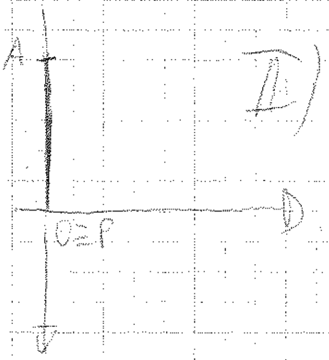
(che si invita lo studente a completare)

Con semplici calcoli si verifica che le configurazioni

I) $\begin{cases}\theta=0\\ \xi=0\end{cases}$ e II) $\begin{cases}\theta=\pi\\ \xi=0\end{cases}$

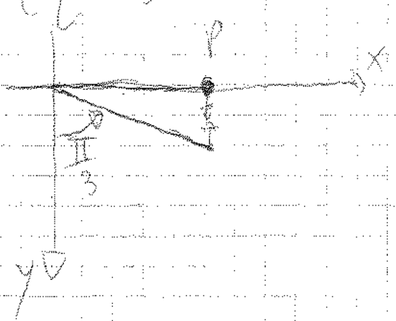
sono di equilibrio instabile

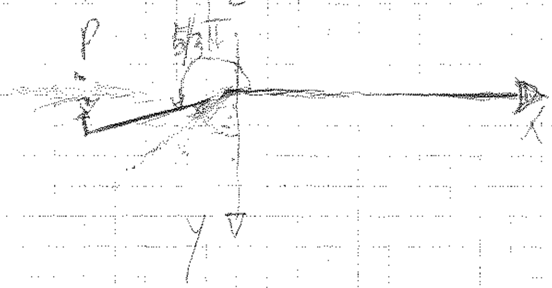



Mentre risultano di equilibrio stabile le configurazioni

III) $\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{3}\\ \xi=\sqrt{3}\,l\end{cases}$ IV) $\begin{cases}\theta=\frac{5}{3}\pi\\ \xi=-\sqrt{3}\,l\end{cases}$




3) $T = T_{asta} + T_{punto} = \frac{1}{2} I_O\, \omega^2 + \frac{1}{2} m_P v_P^2$ , $I_O$ momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse $z$

$I_O = I_G + m l^2 = \frac{m}{12}(2l)^2 + m l^2 = \frac{4}{3} m l^2$

$\omega = \dot\theta\, \underline{k}$

$$\boxed{T = \frac{2}{3} m l^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} m \dot\xi^2}$$

Equazioni di Lagrange: La lagrangiana del sistema (c)

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2 + mg\left(l\cos\theta - \xi^2 + \xi\sin\theta\right)$$

Equazioni di Lagrange

$$\begin{cases} 4l^2\ddot{\theta} + 3gl\sin\theta - 3g\xi\cos\theta = 0 \\ 2l\ddot{\xi} + g\xi - 2gl\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Sussiste l'integrale primo dell'energia totale $T + U = E$, con $E$ costante

iv) Piccole oscillazioni attorno a $\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{3} \\ \xi = l\sqrt{3} \end{cases}$

con il cambio di variabili:

$$\begin{cases} \alpha = \theta - \frac{\pi}{3} \\ x = \xi - l\sqrt{3} \end{cases}$$

Le equazioni di moto diventano

$$\begin{cases} 4l^2\ddot{\alpha} + \frac{3}{2}gl\left(\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha\right) - \frac{3}{2}g\left(x + l\sqrt{3}\right)\left(\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha\right) = 0 \\ 2l\ddot{x} + g\left(x + l\sqrt{3}\right) - gl\left(\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha\right) = 0 \end{cases}$$

Semplificando e linearizzando $\sin\alpha \simeq \alpha$, $\cos\alpha \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, si trova

$$\begin{cases} 8l^2\ddot{\alpha} + 18gl\alpha - 3gx = 0 \\ 2l\ddot{x} - gl\alpha + gx = 0 \end{cases} \qquad (\nabla)$$

Ponendo $x = A_1\cos(\omega t + \lambda)$

$\alpha = A_2\cos(\omega t + \lambda)$

si può trovare l'integrale generale del $(\nabla)$. Si invitano gli studenti a completare il calcolo

5) Posto $V = -U$, sussiste l'integrale primo dell'energia totale $T - U = E \Rightarrow T + V = E$

Sotto l'ulteriore vincolo $\xi = 2l\sin\theta$, l'energia cinetica del sistema è $T = \frac{2}{3} m l^2 (1+3\cos^2\theta)\dot{\theta}^2$, mentre l'energia potenziale è, ~~a meno di una costante~~,

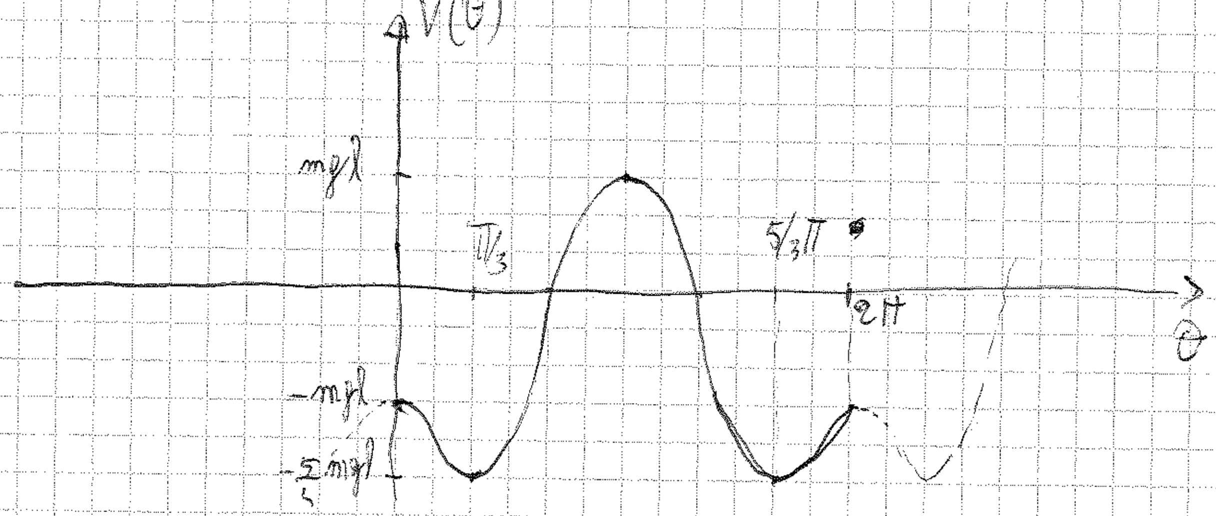
$$V(\theta) = -mgl(-\cos^2\theta + \cos\theta + 1)$$

in cui il termine $-mgl$ può essere trascurato senza ripercussioni sulle conclusioni.

L'integrale primo dell'energia fornisce

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3}{2ml^2} \frac{1}{(1+3\cos^2\theta)} \left(E - V(\theta)\right)$$

e per studiare le caratteristiche del ~~sistema~~ moto del sistema si può applicare la discussione qualitativa di Weierstrass.
Per svolgere tale discussione è sufficiente tracciare il grafico della funzione $V(\theta)$




Si invitano gli studenti ad analizzare i vari casi che si possono presentare.