# Soluzione Prova Parziale di Meccanica 2
## 16 Gennaio 2013

1) Si ha $A = (l\sin\varphi, -l\cos\varphi)$, $B = (-l\sin\varphi, l\cos\varphi)$ e consideriamo $\varphi \in [0, 2\pi]$. Il potenziale è (a meno di una inessenziale costante)

$$U = \frac{l}{2}(-kl + \frac{mg}{3})\cos^2\varphi + mgl\cos\varphi.$$

Le configurazioni di equilibrio si determinano risolvendo l'equazione $U_\varphi = 0$. Poichè $U_\varphi = -l(-kl + \frac{mg}{3})\cos\varphi\sin\varphi - mgl\sin\varphi$, le posizioni di equilibrio sono:

1) $\varphi = 0$;

2) $\varphi = \pi$;

3) $\varphi = 2\pi$ (ometteremo l'analisi della stabilità per questa posizione essendo il potenziale una funzione periodica di periodo $2\pi$);

4) se $|\frac{3mg}{3kl - mg}| < 1$, si ottengono altre due posizioni di equilibrio per $\varphi_{1,2} = \arccos(\frac{3mg}{3kl - mg})$. Occorre inoltre osservare che, dovendo essere $k > 0$, queste due posizioni di equilibrio sono presenti solo se $k > \frac{4mg}{3l}$. (Se fosse $|\frac{3mg}{3kl - mg}| = 1$ le posizioni di equilibrio sono quelle già incontrate nei casi 1), 2) e 3)).

Essendo $U_{\varphi\varphi} = -l(-kl + \frac{mg}{3})\cos 2\varphi - mgl\cos\varphi$, per la stabiltà si trova:

**Studio della stabilità per la posizione di equilibrio $\varphi = 0$.** Poichè $U_{\varphi\varphi}(0) = l(kl - \frac{4mg}{3})$, occorre distinguere fra i seguenti casi:

a. Se $k < \frac{4mg}{3l}$ allora $U_{\varphi\varphi} < 0$. Quindi $U$ possiede un punto di massimo relativo e, per il teorema di Dirichlet-Lagrange, $\varphi = 0$ è una posizione di equilibrio stabile per $k < \frac{4mg}{3l}$.

b. Se $k > \frac{4mg}{3l}$ allora $U_{\varphi\varphi} > 0$. Quindi $U$ possiede un punto di minimo relativo e, per il teorema di Lyapunov, $\varphi = 0$ è una configurazione di equilibrio instabile per $k > \frac{4mg}{3l}$.

c. Se $k = \dfrac{4mg}{3l}$ allora $U_{\varphi\varphi} = 0$. Ma per $k = \dfrac{4mg}{3l}$, si verifica subito che $U_\varphi = mgl\sin\varphi(\cos\varphi - 1)$. E' immediato constatare che $U_\varphi$ cambia segno in un intorno dell'origine e, più precisamente, $U_\varphi$ è positiva a sinistra di zero e negativa a destra. Quindi, $U$ possiede un punto di massimo e, per il teorema di Dirichlet-Lagrange, $\varphi = 0$ è una configurazione configurazione di equilibrio stabile per $k = \dfrac{4mg}{3l}$.

**Studio della stabilità per la posizione di equilibrio $\varphi = \pi$.** Poichè $U_{\varphi\varphi}(\pi) = l(kl + \frac{2mg}{3}) > 0$, $U$ possiede un punto di minimo relativo e, per il teorema di Lyapunov, $\varphi = \pi$ è una configurazione di equilibrio instabile (per qualunque $k$ $(k > 0)$).

**Studio della stabilità per le posizioni di equilibrio $\varphi_{1,2}$ (per $k > \dfrac{4mg}{3l}$).** Scrivendo $U_{\varphi\varphi}$ come $U_{\varphi\varphi} = -l(-kl + \frac{mg}{3})(2\cos^2\varphi - 1) - mgl\cos\varphi$ e sostituendo in quest'ultima espressione $\cos\varphi_{1,2} = \dfrac{3mg}{3kl - mg}$, non é difficile, con un pò di pazienza, verificare che per $k > \dfrac{4mg}{3l}$, $U_{\varphi\varphi}(\varphi_{1,2}) < 0$. Quindi $U$ possiede un punto di massimo relativo e, per il teorema di Dirichlet-Lagrange, le configurazioni $\varphi_{1,2}$ per $k > \dfrac{4mg}{3l}$ (ricorda che tali posizioni esistono solo per tali valori di $k$) sono di equilibrio stabile.

2) Si ha $T = \dfrac{3}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$. Quindi, introducendo la funzione di Lagrange

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{3}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - \frac{l}{2}(\frac{mg}{3})\cos^2\varphi + mgl\cos\varphi,$$

si trova immediatamente che l'equazione del moto del sistema $\frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0$ assume la forma:

$$3l\ddot{\varphi} - \frac{g}{3}\cos\varphi\sin\varphi + g\sin\varphi = 0.$$

5) Per studiare le piccole oscillazioni, prima di tutto osserviamo che per $k = \dfrac{2}{3}\dfrac{mg}{l}$, $\varphi = 0$ è una posizione di equilibrio stabile. La funzione di Lagrange contenente solo i termini di primo e secondo ordine in $\varphi$ e $\dot{\varphi}$ in un intorno di $\varphi = 0$ è (a meno di una costante inessenziale)

$$\mathcal{L}^* = \frac{3}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - \frac{mgl}{3}\varphi^2$$

che conduce alla seguente equazione (moto armonico):

$$\ddot{\varphi} + \frac{2g}{9l}\varphi = 0.$$

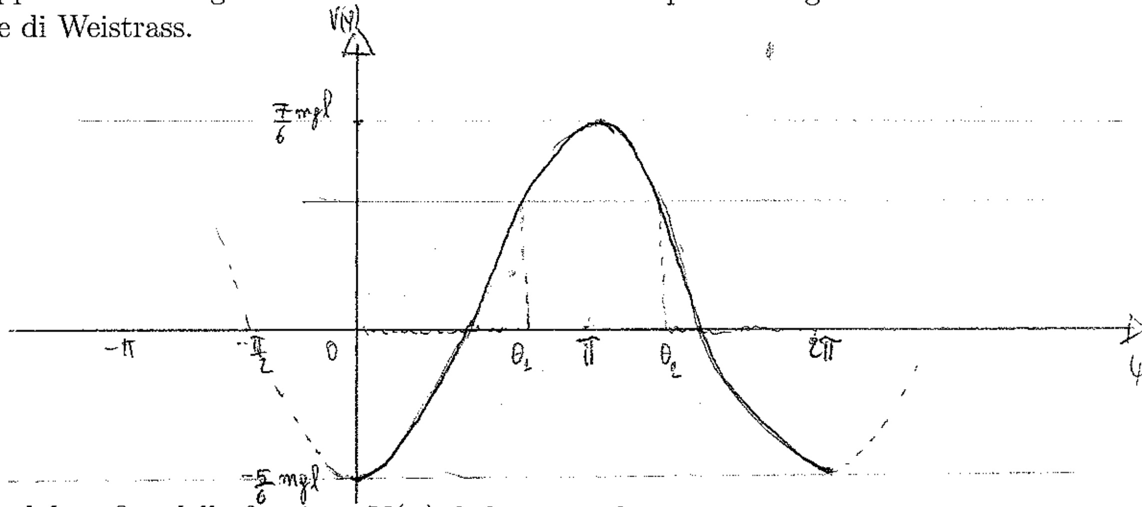
L'integrale generale delle piccole oscillazioni attorno a $\varphi = 0$ è quindi

$$\varphi(t) = A\cos(\frac{1}{3}\sqrt{2gt} + \alpha).$$

3) Per $k = \dfrac{2}{3}\dfrac{mg}{l}$ l'energia potenziale del sistema é (a meno di una costante) $V = \dfrac{lmg}{6}\cos^2\varphi - mgl\cos\varphi$, la legge di conservazione dell'energia totale (che è un integrale primo del moto) consente di scrivere

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{3ml^2}\sqrt{E - \frac{lmg}{6}\cos^2\varphi + mgl\cos\varphi}\,,$$

dove $E$ rappresenta l'energia totale del sistema. Possiamo quindi svolgere la discussione di Weistrass.




Quindi, dal grafico della funzione $V(\varphi)$ deduciamo che

- $E > \dfrac{7mgl}{6}$ moto rivolutivo;
- $E = \dfrac{7mgl}{6}$ moto a meta asintotica se $\varphi(0) \neq \pi$, equilibrio instabile se $\varphi(0) = \pi$;

- $\dfrac{-5mgl}{6} < E < \dfrac{7mgl}{6}$ moto periodico (nelle bande permesse):
- $E = \dfrac{-5mgl}{6}$ equilibrio stabile;
- $E < \dfrac{-5mgl}{6}$ moto impossile.

4) Se $\varphi(0) = \dfrac{\pi}{2}$, $\dot{\varphi}(0) = \pm\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$, allora dalla legge di conservazione dell'energia totale,

$$E = T + V = \frac{3}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{lmg}{6}\cos^2\varphi - mgl\cos\varphi$$

si ricava il valore dell'energia totale $E = \dfrac{mgl}{6}$ e per quanto detto al punto 3), si conclude che il moto è periodico.