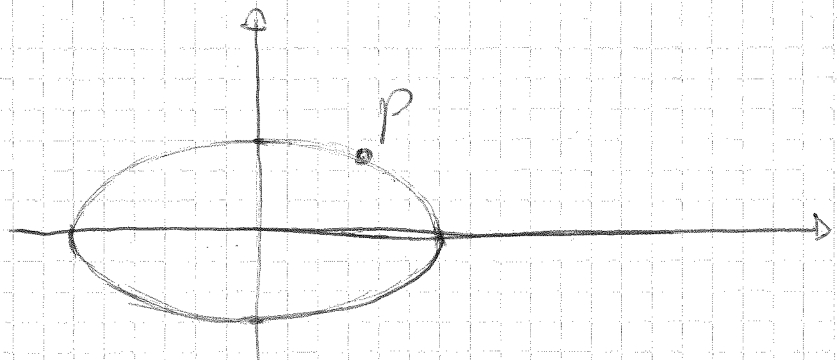
SOLUZIONE PRIMA PROVA PARZIALE
MECCANICA 2
09/11/2015

2



$$P(2l\cos\theta,\ l\sin\theta) \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\bar{P} = (0, l\sin\theta)$$

$$A = (2l, 0)$$

$$P-A = (2l\cos\theta - 2l,\ l\sin\theta)$$

$$(P-A)^2 = 4l^2\cos^2\theta + 4l^2 - 8l^2\cos\theta + l^2\sin^2\theta$$
$$= 3l^2\cos^2\theta - 8l^2\cos\theta + 5l^2$$

$$P-\bar{P} = (2l\cos\theta, 0) \quad , \quad (P-\bar{P}) = 4l^2\cos^2\theta$$

$$\boxed{U = -\frac{K}{2}(P-A)^2 - \frac{h}{2}(P-\bar{P})^2 + \text{cost}}$$

$$U = -\frac{K}{2}(3l^2\cos^2\theta + 8l^2\cos\theta + 5l^2) - \frac{h}{2}4l^2\cos^2\theta + \text{cost}$$

A meno di una costante si trova quindi

$$\boxed{U = \left(-\frac{3}{2}K - 2h\right)l^2\cos^2\theta + 4Kl^2\cos\theta}$$

Posizioni di equilibrio

$$U_\theta = -2\left(-\frac{3}{2}K - 2h\right)l^2\cos\theta\sin\theta - 4Kl^2\sin\theta = \sin\theta\left[(3K+4h)l^2\cos\theta - 4Kl^2\right]$$

5

$$U_\theta = l^2 \sin\theta \left[(3K+4h)\cos\theta - 4K \right] = 0$$

Posizioni equilibrio:

$\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$

Altre due posizioni di equilibrio si hanno se

$\cos\theta = \dfrac{4K}{3K+4h}$ che ammette soluzioni

se $\left| \dfrac{4K}{3K+4h} \right| \leq 1$

•) Osservo che se vale l'uguale ritrovo $\theta_{1,2}$

••) Poiché $K, h > 0$ $\left| \dfrac{4K}{3K+4h} \right| = \dfrac{4K}{3K+4h}$

Quindi se $\dfrac{4K}{3K+4h} < 1$ si hanno altre due posizioni

di equilibrio θ_3 t.c. $\cos\theta_3 = \dfrac{4K}{3K+4h}$ e $\theta_4 = 2\pi - \theta_3$ -

NOTA $\rightarrow \theta_3, \theta_4$ sono presenti solo se $\dfrac{4K}{3K+4h} < 1$ ~~con~~ verificato

Rimarco ancora che

se

$$\frac{4K}{3K+4h} < \frac{3K+4h}{3K+4h}$$

$$\Downarrow$$

$$K < 4h$$

Quindi se scelgo ~~come~~ dati del problema

$K = 2h$ ho quattro punti critici ...

C

$$T = \frac{1}{2} m v_P^2$$

$$P = (2l\cos\theta\ ,\ l\sin\theta)$$

$$\dot{P} = \dot\theta(-2l\sin\theta\ ,\ l\cos\theta)$$

$$v_P^2 = \dot\theta^2 (4l^2\sin^2 + l^2\cos^2\theta) = \dot\theta^2 (3l^2\sin^2\theta + l^2)$$

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2 (3\cancel{l^2}\sin^2\theta + 1)$$

Equazioni di Lagrange

$$\mathcal{L} = T + U = \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2 (3\sin^2\theta + 1) + \left(-\frac{3}{2}K - 2h\right) l^2 \cos^2\theta + 4Kl^2\cos\theta)$$

per risparmiarci mi calcoli osservo che l'equazione di Lagrange si scrive nella forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = U_\theta \qquad \text{con } U_\theta \text{ già calcolato}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = \frac{m}{2}\left[2\dot\theta\,(3l^2\sin^2\theta + l^2)\right] = \frac{m}{2}\left[2l^2\dot\theta\,(3\sin^2\theta + 1)\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right) = \frac{m}{2}\left[2l^2\ddot\theta\,(3l^2\sin^2\theta + 1) + 2l^2\dot\theta^2 (6\cancel{l^2}\sin\theta\cos\theta)\right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2 (6\sin\theta\cos\theta)$$

eq. di Lagrange

$$ml^2\ddot\theta\,(3l^2\sin^2\theta + 1) + 3ml^2\dot\theta^2\sin\theta\cos\theta = U_\theta$$

vedi equazione già calcolata

$$\boxed{K=2h} \Rightarrow \boxed{U=-5hl^2\cos^2\theta+8hl^2\cos\theta}$$

Sussiste l'integrale primo dell'energia

$$T-U=E \Rightarrow T=E+U$$

da cui

$$\boxed{\dot\theta^2=\frac{2}{ml^2}\frac{1}{3\sin^2\theta+1}\left[E-5hl^2\cos^2\theta+8hl^2\cos\theta\right)}$$

~~A~~ Tale tipo di equazione si può studiare ~~la~~ qualitativamente con la discussione di Weierstrass

Posto $\boxed{V(\theta)=5hl^2\cos^2\theta-8hl^2\cos\theta}$ occorre tracciarne il grafico

energia potenziale ovviamente definita a meno di una costante!!

$$V_\theta=2l^2h\sin\theta(-5\cos\theta+4)$$

che si annulla per le posizioni di equilibrio

$$\theta=\theta_1,\ \theta=\theta_2,\ \theta=\theta_3 \text{ e } \theta=\theta_4$$

$$V''(\theta)=+2l^2h\cos\theta(-5\cos\theta+4)+10l^2h\sin^2\theta$$

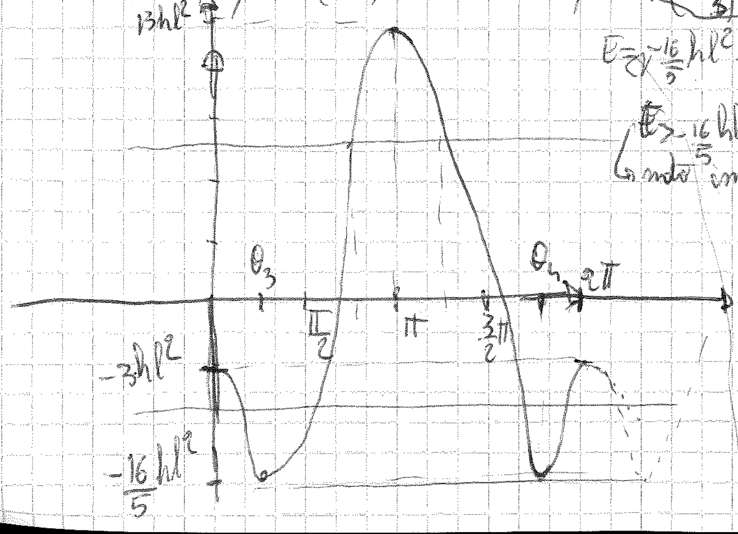
$V''(0)=-2l^2h<0$ Max relativo

$V''(\pi)=-2l^2h(5+4)<0$ Max relativo

$V''(\theta_3)=V''(\theta_4)=10l^2h\sin^2(\theta_3)>0$ min relativo

$V(0)=-3hl^2$, $V(\pi)=13hl^2$, $V(\theta_3)=V(\theta_4)=5hl^2\left(\frac{4}{5}\right)^2-8hl^2\frac{4}{5}$

$$=-\frac{16}{5}hl^2$$



Ho alterato la scala!!

$E=-\frac{16}{5}hl^2$ equilibrio

$E<-\frac{16}{5}hl^2$ moto impossibile

nelle bande permesse

$E>13hl^2$ moto rivolutorio

$E=13hl^2$ $\begin{cases}\text{moto a meta asintotica se } \theta(0)\neq\pi\\ \text{equilibrio se } \theta(0)=\pi\end{cases}$

$-3hl^2<E<13hl^2$ moto oscillatorio periodico

$E=-3hl^2$ $\begin{cases}\text{moto a meta asintotica se } \theta(0)\neq 0,2\pi\\ \text{equilibrio se } \theta(0)=0,2\pi\end{cases}$

$-3hl^2<E<-\frac{16}{5}hl^2$ moto oscillatorio periodico nelle bande permesse