Meccanica 1

Esercizio 1 29/09/2015 ①

①

Rispetto alla terna trirettangola e levogira $Oxyz$, si consideri il sistema di vettori applicati:

$$(A_1, \underline{v_1}), (A_2, \underline{v_2}), (A_3, \underline{v_3}), (A_4, \underline{v_4}), (A_5, \underline{v_5})$$

essendo $A_1 = (2,3,1)$, $A_2 = (1,1,0)$, $A_3 = (1,2,2)$, $A_4 = (0,0,1)$

$A_5 = (-1, 3, 10)$

e $\underline{v_1} = (0,-1,-2)$, $\underline{v_2} = (2,0,-6)$, $\underline{v_3} = (1,1,-1)$, $\underline{v_4} = (-1,2,7)$

$\underline{v_5} = (2,3,0)$. Si chiede di:

a) Trovare il momento risultante del sistema rispetto all'origine
b) Scrivere l'equazione dell'asse centrale
c) Scrivere e determinare un sistema di vettori applicati a cui il sistema è riducibile

continua a pagina ② → ultima pagina foglio A4

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{5} \underline{v_i} = (4,5,-2) \quad , \quad R^2 = 16+25+4 = 45$$

$$\underline{M}_0 = \sum_{i=1}^{5} (A_i - O) \wedge \underline{v_i} = (2\underline{i}+3\underline{j}+\underline{k}) \wedge (-\underline{j}-2\underline{k}) + (\underline{i}+\underline{j}) \wedge (2\underline{i}-6\underline{k}) + (\underline{i}+2\underline{j}+2\underline{k}) \wedge (\underline{i}+\underline{j}-\underline{k}) + \underline{k} \wedge (-\underline{i}+2\underline{j}+7\underline{k}) + (-\underline{i}+3\underline{j}+10\underline{k}) \wedge (2\underline{i}+3\underline{j})$$

N.B.

Il sistema è ~~un sistema piano~~!! quindi l'invariante scalare $I = \underline{R} \cdot \underline{M}_0 = 0$

$-3-6-1$

$\cancel{(3,-2,1)\cdot(1,2,7) = -3-4+7 = 0}$

Eq. Piano : $\boxed{3x - 2y + z - 1 = 0}$

$\cancel{(3,-2,1)\cdot(2,3,0) = 6-6 = 0}$

$A_1 = (2,3,1)$, $A_2 = (1,1,0)$, $A_3 = (1,2,2)$, $A_4 = (0,0,1)$

$A_5 = (-1, 3, 10)$

$\underline{v_1} = (0,-1,-2)$, $\underline{v_2} = (2,0,-6)$, $\underline{v_3} = (1,1,-1)$, $\underline{v_4} = (-1,2,7)$

$\underline{v_5} = (2,3,0)$

$\underline{M}_0 =$ ②

$= -2\underline{k} + 4\underline{j} - 6\underline{i} + \underline{i}$

$+ 6\underline{j} - 2\underline{k} - 6\underline{i}$

$+ \underline{k} + \underline{j} - 2\underline{k} - 2\underline{i} + 2\underline{j} - 2\underline{i} - \cancel{2\underline{j}}$

$- \underline{j} - 2\underline{i}$

$- 3\underline{k} - 6\underline{k} + 20\underline{j} - 30\underline{i}$

$\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k}$

$\underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j}$

$\underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i}$

$\underline{M}_0 = \boxed{-47\underline{i} + 32\underline{j} - 14\underline{k}}$ Si verifica quindi che $I = 0$ essendo

$$\underline{M}_0 \cdot \underline{R} = (-47\underline{i} + 32\underline{j} - 14\underline{k}) \cdot (4, 5, -2) = -188 + 160 + 28 = 0$$

$47 \cdot 4 = 188$ $\quad -188$

$32 \cdot 5 = 160$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{R} &= 4\underline{i} + 5\underline{j} - 2\underline{k} \\ \underline{M}_0 &= -47\underline{i} + 32\underline{j} - 14\underline{k} \end{aligned}}$$

$I = \underline{R} \cdot \underline{M}_0 = 0$ (infatti il sistema è un sistema piano!)

3) Il sistema è quindi equivalente al risultante $\underline{R}$ applicato in un punto dell'asse centrale.

Quindi detto A un punto dell'asse centrale ~~esso~~ un sistema equivalente a quello dato è $(A, \underline{R})$.

Si può prendere come A il punto definito come

$$A = O + \frac{\underline{R} \wedge \underline{M}_0}{R^2} = \frac{\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 4 & 5 & -2 \\ -47 & 32 & -14 \end{vmatrix}}{45} = \ldots$$

Eq. asse centrale in forma parametrica

$$\begin{cases} x = x_A + 4\lambda \\ y = y_A + 5\lambda \\ z = z_A - 2\lambda \end{cases}$$

dove x_A, y_A, z_A sono le coordinate del punto A

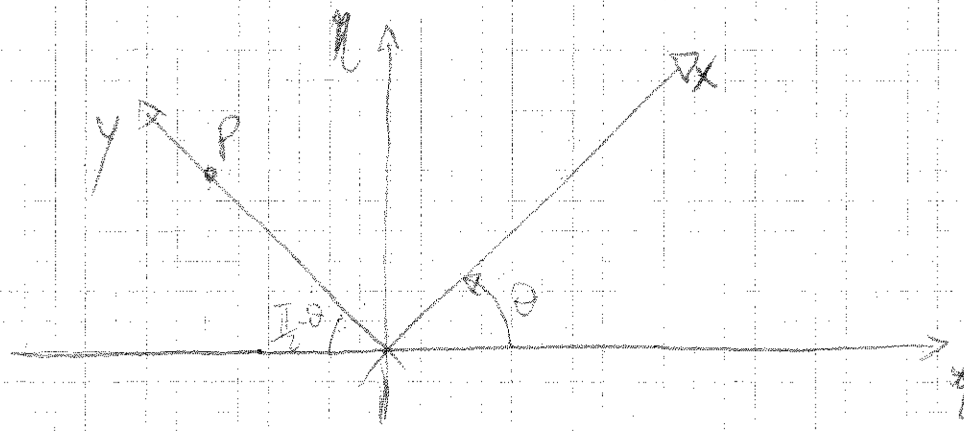
Meccanica 1 (29/09/2015) 2

Esercizio 2

L'asse x passante per l'origine di un sistema cartesiano Oxy (Assi di riferimento) forma con l'asse ξ un angolo θ variabile con il tempo in accordo alla legge $\theta = \omega t$ (ω costante). Si consideri un punto P che si muove sull'asse y con la legge $y = \frac{1}{2} a t^2$ (a, con a costante). Detto assoluto il moto di P rispetto a $O\xi\eta$ e relativo quello rispetto a Oxy, si calcolino

a) velocità assoluta, relativa e di trascinamento

b) accelerazione assoluta, relativa e di trascinamento



Soluzione (Traccia)

Siano $\underline{c}_1$, $\underline{c}_2$ i versori degli assi ξ, η e $\underline{i}$, $\underline{j}$ i versori degli assi x, y

a) Rispetto al riferimento Oxy si ha $\underline{P}(0, \frac{1}{2} a t^2)$

e quindi la ~~$v_P^{(r)} = \frac{1}{2} a t^2$~~ ~~$\underline{v}_P^{(r)} = a t \underline{j}$, $\underline{a}^{(r)} = a \underline{j}$~~

$\underline{v}_P^{(r)} = a t \underline{j}$, $\underline{a}_P^{(r)} = a \underline{j}$

Osserviamo che: $\underline{i} = (\underline{i} \cdot \underline{c}_1)\underline{c}_1 + (\underline{i} \cdot \underline{c}_2)\underline{c}_2 = \cos\theta\, \underline{c}_1 + \sin\theta\, \underline{c}_2$

$\underline{j} = (\underline{j} \cdot \underline{c}_1)\underline{c}_1 + (\underline{j} \cdot \underline{c}_2)\underline{c}_2 = -\sin\theta\, \underline{c}_1 + \cos\theta\, \underline{c}_2$

~~$\underline{i} = \alpha \underline{c}_1 + \beta \underline{c}_2$~~

Rispetto al rif. $O\xi\eta$
$$P = (-y \sin\theta,\ y\cos\theta)$$

$$\underline{v}_P^{(a)} = \left(\left[-a t \sin(\omega t) - \frac{1}{2} a t^2 \omega \cos(\omega t)\right]\underline{c}_1 + \left[a t \cos(\omega t) - \frac{1}{2} a t^2 \omega \sin(\omega t)\right]\underline{c}_2\right)$$

$\frac{\pi}{2} + \theta$ $\qquad \frac{\pi}{2} - \theta \quad \frac{\pi}{2}$

Derivando $v_P^{(a)}$ si trova $\underline{a}_P^{(a)}$

$$a_P^{(a)} = \left[-a \sin(\omega t) - a \omega t \cos\omega t - a t \omega \cos\omega t + \frac{1}{2} a t^2 \omega^2 \sin(\omega t)\right]\underline{c}_1$$
$$\left[a \cos(\omega t) - a \omega t \sin(\omega t) - a t \omega \sin(\omega t) - \frac{1}{2} a t^2 \omega^2 \cos(\omega t)\right]\underline{c}_2$$

$\underline{k} \equiv \underline{c}_3$

Il moto della terna Oxy è rotatorio uniforme rispetto all'asse $z \equiv \zeta$

Si ha $\underline{\omega}^{(t)} = \dot\theta\, \underline{c}_3$ e $\underline{v}_P^{(r)} = a t(-\sin\theta\, \underline{c}_1 + \cos\theta\, \underline{c}_2)$ → rispetto a terna Oxy $P-O = y\underline{I}$ lunghezza $\underline{I}$ fisso e terna

e quindi $\underline{a}^{(C)} = 2\underline{\omega}^{(t)} \wedge \underline{v}^{(r)} = 2\dot\theta\, \underline{k}_3 \wedge (-a t \sin\theta\, \underline{c}_1 + a t \cos\theta\, \underline{c}_2)$
$$= -2\dot\theta a t \sin(\omega t)\, \underline{c}_2 - 2\dot\theta a t \cos(\omega t)\, \underline{c}_1$$

$\underline{c}_1 \wedge \underline{c}_2 = \underline{c}_3$
$\underline{c}_3 \wedge \underline{c}_2 = -\underline{c}_1$
$\underline{c}_1 \wedge \underline{c}_3 = -\underline{c}_2$

La velocità di trascinamento per il teorema di Coriolis sarà data da
$$\underline{v}_P^{(t)} = \underline{v}_P^{(a)} - \underline{v}_P^{(r)} = \left(-\frac{1}{2} a t^2 \omega \cos(\omega t)\, \underline{c}_1 - \frac{1}{2} a t^2 \omega \sin(\omega t)\, \underline{c}_2\right)$$

$$\underline{a}_P^{(t)} = \underline{a}^{(a)} - \underline{a}^{(r)} - \underline{a}^{(C)}$$
→ NOTA occorre esprimere tutto rispetto alla stessa base, per esempio $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2\}$
$\underline{a}^{(a)}$ e $\underline{a}^{(C)}$ son già espresse in tale base
mentre $\underline{a}_P^{(r)} = a(-\sin(\omega t)\underline{c}_1 + \cos(\omega t)\ldots$

ora basta fare i calcoli semplici

Nota la velocità di trascinamento si può trovare direttamente
anche osservando che essa è la velocità che compete al punto dello spazio solidale ~~che nell'istante~~ solidale al riferimento mobile nell'istante considerato. ~~Quindi~~ ~~$P-O = y\underline{I}$~~

quindi $\underline{a}_P^{(t)}$ Quindi $P - O = y\,\underline{I}$ con y costante e $\underline{I}$ ~~solo~~ dipendente dal tempo!

$y = \frac{1}{2} a t^2 !!$

cioè $\underline{v}_P^{(t)} = y \frac{d\underline{I}}{dt} = y(-\omega \sin(\omega t)\, \underline{c}_1 + \omega \cos(\omega t)\, \underline{c}_2)$

$$\underline{a}_P^{(t)} = y \frac{d^2\underline{I}}{dt^2} = y(-\omega^2 \cos(\omega t)\, \underline{c}_1 - \omega^2 \sin(\omega t)\, \underline{c}_2)$$

Meccanica 1 29/09/2015

Esercizio 3

Essendo l'asse y asse di simmetria materiale si ha

a) $x_G = z_G = 0$

$$y_G = \frac{\int_C \rho y \, dC}{\int_C \rho \, dC} = \frac{\int_{R_1}^{R_2} d\rho \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\rho \, d\theta}{\int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\pi} \rho \, d\rho \, d\theta} = \frac{4}{3\pi} \frac{(R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2)}{R_1 + R_2}$$

b) $$I_x = \int_C \rho (y^2 + z^2) \, dC = \rho \int_C y^2 \, dC = \dots = \frac{M}{4}(R_1^2 + R_2^2)$$

$$I_y = \int_C \rho (x^2 + z^2) \, dC = \rho \int_C x^2 \, dC = \dots = \frac{M}{4}(R_2^2 + R_1^2)$$

$$I_{xz} = I_{yz} = 0$$

$$I_{xy} = \int_C \rho xy \, dC = \rho \int_C xy \, dC = \dots = \frac{M}{8} \frac{(R_2^4 - R_1^4)}{R_2^2 - R_1^2} \int_0^{\pi} \sin 2\theta \, d\theta$$

$= (\dots$ continuate voi

La terna Oxyz non è principale d'inerzia ...

Meccanica 2 29/09/2015

Esercizio 4 (Traccia)

(1)

Si ha $G = \left(x, \frac{l}{2}\right)$

$$G_1 = \left(x + 2l\cos\theta, \frac{l}{2} + 2l\cos\theta\right)$$

$$A = \left(x + 4l\cos\theta, \frac{l}{2} + 4l\sin\theta\right)$$

$$U = -mgy_G - mgy_{G_1} + \frac{1}{2} I_{yy}^{(quad)} \omega^2 + \frac{1}{2} I_{yy}^{(asta)} \omega^2 + cost$$

dove:

$I_{yy}^{(asta)}$ è il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse y

$I_{yy}^{(quad)}$ è il momento d'inerzia del quadrato rispetto all'asse y

Si trova facilmente

$$I_{yy}^{(asta)} = \frac{m}{12}(4l)^2\cos^2\theta + m(x + 2l\cos\theta)^2$$

$$I_{yy}^{(quad)} = \frac{m}{12} l^2 + mx^2$$

Quindi $U = -2mgl\sin\theta + \frac{m}{2}x^2\omega^2 + \frac{m}{2}(x + 2l\cos\theta)^2\omega^2 +$

$$+ \frac{8}{3} ml^2\omega^2\cos^2\theta + cost.$$

Semplici calcoli conducono alle seguenti configurazioni di equilibrio relativo

I) $\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases}$, II) $\begin{cases} \theta = \frac{3}{2}\pi \\ x = 0 \end{cases}$, III) $\begin{cases} \theta_1 = \arcsin\left(\frac{-g}{?}\right) \\ x = -l\cos\theta_1 \end{cases}$

IV) $\begin{cases} \theta_2 = \pi - \theta_1 \\ x = -l\cos(\theta_2) \end{cases}$

e le posizioni III) e IV) sono presenti solo se $\left|\frac{x}{l}\right| < 1$

2) $T = T_{quad} + T_{asta}$

$T_{quad} = \frac{1}{2} m v_G^2$ essendo il moto traslatorio

$T_{asta} = \frac{1}{2} m v_{G_1}^2 + \frac{1}{2} I_{G_1} \dot{\theta}^2$ essendo I_{G_1} il momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo all'asse z e passante per il punto G_1.

$$\boxed{I_{G_1} = \frac{1}{12} m (4l)^2 = \frac{4}{3} m l^2}$$

quindi $T_{quad} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$$T_{asta} = m\left(\frac{\dot{x}^2}{2} - 2l\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + \frac{8}{3} l^2 \dot{\theta}^2\right)$$

si invitano gli studenti a completare il calcolo.