Traccia Soluzione esercizi

Prova scritta Meccanica 24/06/2015

Si invitano gli studenti a completare gli eventuali calcoli non presenti in questa traccia di soluzione

Esercizio 1

$\underline{R} = 5\underline{i} + 4\underline{J} + 9\underline{K}$

$\underline{M}_0 = 8\underline{i} - 10\underline{J}$

Osserviamo che il sistema è un sistema piano e quindi l'invariante scalare $\mathcal{I}$ è nullo (segue anche da un calcolo diretto $0 = (5,4,9)\cdot(8,-10,0)$
Il sistema è quindi riducibile al seguente $(A, \underline{R})$ essendo A un punto dell'asse centrale.

$$A = O + \frac{\underline{R} \wedge \underline{M}_0}{R^2} = \left(\frac{90}{122}, \frac{72}{122}, \frac{-82}{122}\right)$$

Eq. asse centrale
$$\begin{cases} x = x_A + 5\lambda \\ y = y_A + 4\lambda \\ z = z_A + 9\lambda \end{cases}$$

Esercizio 2) Siano $\underline{i}$, $\underline{J}$ i versori degli assi x e y (rispettivamente) e $\underline{c}_1$, $\underline{c}_2$ i versori degli assi ξ, η (rispettivamente).

$$\underline{i} = (\underline{i}\cdot\underline{c}_1)\,\underline{c}_1 + (\underline{i}\cdot\underline{c}_2)\,\underline{c}_2 = \cos(\alpha+\theta(t))\,\underline{c}_1 + \sin(\alpha+\theta(t))\,\underline{c}_2$$

$$\underline{J} = -\sin(\alpha+\theta(t))\,\underline{c}_1 + \cos(\alpha+\theta(t))\,\underline{c}_2$$

$$\boxed{P - O = r\cos\varphi(t)\,\underline{i} + r\sin\varphi(t)\,\underline{J}} \quad (1) \qquad \text{con } \varphi(t) = e^{bt},\ \dot\varphi = b e^{bt}$$

$$\underline{v}_P^{(r)} = -r\dot\varphi\sin\varphi(t)\,\underline{i} + r\dot\varphi\cos\varphi(t)\,\underline{J} \quad (2)$$

$$P-\Omega = (P-O) + (O-\Omega)$$

$$= r\cos\varphi\, \underline{i} + r\sin\varphi\, \underline{J} + S_0 \cos\alpha\, \underline{c}_1 + S_0 \sin\alpha\, \underline{c}_2$$

$$= r\cos\varphi(t)\left[\cos(\alpha+\theta(t))\underline{c}_1 + \sin(\alpha+\theta(t))\underline{c}_2\right]$$

$$+ r\sin\varphi(t)\left[-\sin(\alpha+\theta(t))\underline{c}_1 + \cos(\alpha+\theta(t))\underline{c}_2\right]$$

$$+ h\cos Kt\cos\alpha\, \underline{c}_1 + h\sin Kt\sin\alpha\, \underline{c}_2$$

cioè

$$\boxed{\begin{aligned} P-\Omega = &\left(r\cos\varphi(t)\cos(\omega t+\alpha) \cancel{- r\sin\varphi(t)}\ldots \sin(\omega t+\alpha) + h\cos\alpha\cos Kt\right)\underline{c}_1 \\ &\cancel{+ r\cos\varphi(t)\sin(\omega t+\alpha) + r\sin\varphi(t}\\ &+\left(r\cos\varphi(t)\sin(\omega t+\alpha) + r\sin\varphi(t)\cos(\omega t+\alpha) + h\sin\alpha\sin Kt\right)\underline{c}_2\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{v}_P^{(a)} = &\left[-r\dot\varphi\sin\varphi(t)\cos(\omega t+\alpha) - r\omega\cos\varphi(t)\sin(\omega t+\alpha) - r\dot\varphi\cos\varphi\sin(\omega t+\alpha)\right.\\ &\left.- r\omega\sin\varphi(t)\cos(\omega t+\alpha) - hK\cos\alpha\sin Kt\right]\underline{c}_1 \\ &+\left[-r\dot\varphi\sin\varphi(t)\sin(\omega t+\alpha) + r\omega\cos\varphi(t)\cos(\omega t+\alpha) + r\dot\varphi\cos\varphi\cos(\omega t+\alpha)\right.\\ &\left.- r\omega\sin\varphi(t)\sin(\omega t+\alpha) + hK\sin\alpha\cos Kt\right]\underline{c}_2\end{aligned}}$$

(3)

(4)

Le derivate di (2) e (3) danno l'accelerazione relativa e quella assoluta (raggruppate i termini prima di fare i calcoli ---)

Per il teorema di composizione delle velocità

$$\boxed{\underline{v}_P^{(t)} = \underline{v}_P^{(a)} - \underline{v}_P^{(r)}} \qquad (4)$$

la velocità relativa ~~nel riferim~~ espressa in termini dei versori $\underline{c}_1, \underline{c}_2$

è $\underline{v}_P^{(r} = -r\dot\varphi\sin\varphi(t)\left(\cos(\alpha+\omega t)\underline{c}_1 + \sin(\omega t+\alpha)\underline{c}_2\right) + \ldots$
$+ r\dot\varphi\cos\varphi(t)\left(-\sin(\omega t+\alpha)\underline{c}_1 + \cos(\alpha+\omega t)\underline{c}_2\right)$

Quindi

$$\underline{v}_P^{(t)} = \underline{v}_P^{(a)} - \underline{v}_P^{(r)} =$$

$$= \left[-r\omega \cos\varphi(t)\sin(\omega t+\alpha) - r\omega\sin\varphi(t)\cos(\omega t+\alpha) - hK\cos\alpha\sin(Kt)\right]\underline{c}_1$$

$$+\left[r\omega\cos\varphi(t)\cos(\omega t+\alpha) - r\omega\sin\varphi(t)\sin(\omega t+\alpha) + hK\sin\alpha\cos(Kt)\right]\underline{c}_2$$

Rimane da calcolare l'accelerazione di Coriolis.

Per definizione $\underline{a}^{(c)} = 2\,\underline{\omega}^{(t)} \wedge \underline{v}_P^{(r)}$ (essendo $\underline{\omega}^{(t)}$ la ~~accelerazione~~ velocità angolare di trascinamento, cioè la velocità angolare della terna Oxy rispetto alla terna $\Omega\xi\eta$)

Ovviamente, $\underline{c}_3 = \underline{c}_1 \wedge \underline{c}_2$

$$\underline{K} = \underline{i} \wedge \underline{j}$$

$$\underline{\omega}^{(t)} = \dot\theta\,\underline{c}_3 = \dot\theta\,\underline{K}$$

$$\underline{\omega}^{(t)} \wedge \underline{v}_P^{(r)} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{K} \\ 0 & 0 & \dot\theta \\ -r\dot\varphi\sin\varphi(t) & r\dot\varphi\cos\varphi(t) & 0 \end{vmatrix}$$

$\dot\varphi = b e^{bt}$

$$= -r\dot\theta\left(\dot\varphi\cos\varphi(t)\,\underline{i} + \dot\varphi\sin\varphi(t)\,\underline{j}\right) = -r\omega\dot\varphi\left(\cos\varphi(t)\,\underline{i} + \sin\varphi(t)\,\underline{j}\right)$$

Quindi

$$\underline{a}^{(c)} = -2r\omega\dot\varphi\left(\cos\varphi(t)\,\underline{i} - \sin\varphi(t)\,\underline{j}\right)$$

Volendo la si può esprimere ~~nel~~ rispetto al riferimento fisso ...

Esercizio 3

Per la proprietà distributiva G sarà il baricentro ottenuto del sistema "discreto" $(G_1, M_{rett}), (G_2, M_{semic})$

Essendo le densità omogenee ρ

$M_{rett} = 2\rho R a$, $M_{semic} = \rho \pi R$. L'asse y è asse di simmetria materiale!

$G_1 = \left(0, -\frac{a}{2}, 0\right)$ → lo si verifichi calcolando l'integrale

$$G_2 = \left(0, \frac{2R}{\pi}, 0\right) \to y_{G_2} = \frac{\int_C \nu y \, dC}{\int_C \nu \, dC} = \frac{\int_C y \, dC}{\pi R} = \frac{\int_0^\pi R^2 \sin\theta \, d\theta}{\pi R}$$

$$= -\frac{R}{\pi} \cos\theta \Big|_0^\pi = \frac{2R}{\pi}$$

Quindi $x_G = z_G = 0$

$$y_G = \frac{M_{semic} \, y_{G_2} + M_{rett} \, y_{G_1}}{M_{semic} + M_{rett}} = \frac{\rho \pi R \cdot \frac{2R}{\pi} + 2\rho R a \left(-\frac{a}{2}\right)}{\rho \pi R + \rho 2 R a}$$

$$= \frac{2R^2 - Ra}{\pi R + 2Ra}$$

$$I_x = \int_C \rho (y^2 + z^2) \, dC = \int_C \rho (y^2) \, dC = \ldots = \frac{M_{circ}}{2} R^2 + \frac{M_{rett}}{3} a^2$$

$$I_y = \ldots = \frac{M_{cir}}{2} R^2 + \frac{M_{rett}}{3} (2R)^2$$

$I_z = I_x + I_y$, $I_{xz} = I_{yz} = 0$

$I_{xy} = 0$ per la simmetria della figura.

continuo esercizio 3

$$I_0 = \begin{pmatrix} I_x & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & I_y & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & I_x+I_y \end{pmatrix}$$

Quindi la terna formata dagli assi x, y, z è terna principale d'inerzia perché rispetto ai versori di tali assi la matrice I_0 si presenta nella forma diagonale.

Alternativamente, l'asse z è di principale d'inerzia rispetto ad O (e a qualunque altro suo punto) perché ortogonale al piano di eq. $z=0$ (che è piano di simmetria materiale)

Poiché I_x, I_y e I_z sono gli autovalori di I_0 è immediato verificare che l'autovettore relativo a I_x è $(1,0,0)$

quindi ~~(1,0,0) è as~~ l'asse x è di simmetria materiale e la terna è completata dall'asse y.

~~(NOTA ovviamente~~

Esercizio 4 $\qquad 0 \leq \theta < 2\pi$

$G = \left(x, \frac{l}{2}\right)$

$G_1 = \left(x + 3l\cos\theta, \frac{l}{2} + 3l\sin\theta\right)$, $\quad G_1' = \left(0, \frac{l}{2} + 3l\sin\theta\right)$

$A = \left(x + 6l\cos\theta, \frac{l}{2} + 6l\sin\theta\right)$

$$U = -Mgy_G - mgy_{G_1} - \frac{K}{2}\left(G_1 - G_1'\right)^2 + 2mgy_A + \text{cost}$$

$$= 9mgl\sin\theta - \frac{K}{2}\left(x^2 + 6lx + 9l^2\cos^2\theta\right) + \text{cost}$$

Le configurazioni di equilibrio si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} U_\theta = 0 \\ U_x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3l\cos\theta \\ 9mgl\cos\theta + 3Klx\sin\theta + 9l^2K\cos\theta\sin\theta = 0 \end{cases}$$

cioè I) $\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases}$ II) $\begin{cases} \theta = \frac{3}{2}\pi \\ x = 0 \end{cases}$

$$T = T_{quad} + T_{asta}$$

$$T_{quad} = \frac{1}{2} M v_G^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$ (il moto del quadrato è traslatorio!)

$$T_{asta} = \frac{1}{2} m v_{G_1}^2 + \frac{1}{2} I_{asta}^{(G_1)} \omega^2$$

essendo $\underline{\omega} = \dot{\theta}\underline{K} \Rightarrow \omega^2 = \dot{\theta}^2$

$$I_{asta}^{(G_1)} = \frac{m}{12}(6l)^2 = 3ml^2$$

$$\underline{v}_{G_1} = (\dot{x} - 3l\dot{\theta}\sin\theta \, , \, 3l\dot{\theta}\cos\theta)$$

$$v_{G_1}^2 = \dot{x}^2 + 9l^2\dot{\theta}^2 - 6l\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + 9l^2\dot{\theta}^2 - 6l\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta) + \frac{3}{2} ml^2\dot{\theta}^2}$$