(e)

Soluzione Meccanica 2

22/02/2016

$P_1 = (r\cos\theta, \ r\sin\theta) \qquad 0 \le \theta, \varphi \le 2\pi$

$P_2 = (r\cos\varphi, \ r\sin\varphi)$

$U = -mg y_{P_1} - mg y_{P_2} - \frac{K}{2}(P_1 - P_2)^2 + \text{cost}$ ~~...~~

$U = -mgr(\sin\theta + \sin\varphi) + Kr^2 \cos(\theta - \varphi) + \text{cost}$

Le configurazioni di equilibrio si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} U_\theta = 0 \\ U_\varphi = 0 \end{cases}$$

Tale sistema è
$$\begin{cases} -mg\cos\theta - Kr\sin(\theta - \varphi) = 0 \\ -mg\cos\varphi + Kr\sin(\theta-\varphi) = 0 \end{cases} \quad (a)$$

Sommando le due equazioni si trova

$$-mg(\cos\theta + \cos\varphi) = 0 \Rightarrow \cos\theta = -\cos\varphi \rightarrow \varphi = \pi - \theta \ \text{o} \ \varphi = \pi + \theta$$

Se fosse $\varphi = \pi - \theta$ il sistema (c) diventa $[\sin(\theta - \varphi) = \sin(2\theta - \pi) = -\sin 2\theta]$

$$\begin{cases} -mg\cos\theta + Kr\sin 2\theta = 0 \\ -mg\cos(\pi - \theta) - Kr\sin 2\theta = 0 \end{cases}$$

ovvero $mg\cos\theta - 2Kr\sin\theta\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta(mg - 2Kr\sin\theta) = 0$

Da cui si determinano le configurazioni di equilibrio

1) $\begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{2} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \theta_2 = \frac{3}{2}\pi \\ \varphi_2 = \pi - \frac{3}{2}\pi \simeq \frac{3}{2}\pi \end{cases}$ per la scelta di variabilità di θ e φ

Inoltre, per $K > \frac{mg}{2R}$ si hanno altre due configurazioni di equilibrio ($K = \frac{mg}{2R}$ riconduce a 1) e 2))

3) $\begin{cases} \theta_3 = \arcsin\left(\frac{mg}{2KR}\right) \\ \varphi_3 = \pi - \theta_3 \end{cases}$, 4) $\begin{cases} \theta_4 = \pi - \theta_3 \\ \varphi_4 = \pi - \theta_4 = \theta_3 \end{cases}$

Rimane il caso $\varphi = \pi + \theta$. In tal caso il sistema fornisce

$\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \cos\varphi = 0 \end{cases}$ che conduce alle seguenti altre due configurazioni di equilibrio stabile

5) $\begin{cases} \theta_5 = \frac{\pi}{2} \\ \varphi_5 = \frac{3}{2}\pi \end{cases}$, 6) $\begin{cases} \theta_6 = \frac{3}{2}\pi \\ \varphi_6 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

<u>Stabilità</u>. Posto $K = \frac{mg}{4R}$ le configurazioni di equilibrio di cui tener conto sono solo 1), 2), 5) e 6).

$$H(\theta, \varphi) = \frac{m^2 g^2 r^2}{16}\left[\left(4\sin\theta - \cos(\theta-\varphi)\right)\left(4\sin\varphi - \cos(\theta-\varphi)\right) - \cos^2(\theta-\varphi)\right]$$

Poiché $H\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) = H\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right) = -m^2 g^2 r^2 < 0$, il potenziale ~~ammette~~ ha un punto di sella in corrispondenza alle posizioni di equilibrio 5) e 6) e <u>l'equilibrio è instabile</u>

Invece $H\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{m^2 g^2 R^2}{2} > 0$ ma $U\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4} mgR > 0$

quindi U possiede un punto di minimo in corrispondenza alla configurazione 1). Quindi, per il teorema Lyapunov - Chetaev, ~~in cui~~ la configurazione 1) è di equilibrio instabile.

Resta da analizzare la configurazione di equilibrio 2)

poiché $H\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right) = \frac{3}{2} m^2 g^2 r^2 > 0$ e $U\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right) = -\frac{5}{4} mgr < 0$

U ~~equindi~~ possiede, in corrispondenza della configurazione 2), un punto di massimo relativo proprio. Per il teorema di Dirichlet-Lagrange ~~Ciò~~ la configurazione 2) è di equilibrio stabile

3) Equazioni di moto.

$$T = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right)$$

$$\mathcal{L} = T + U$$

Equazioni di Lagrange:
$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \frac{g}{r} \cos\theta + \frac{g}{4r} \sin(\theta - \varphi) = 0 \\ \ddot{\varphi} + \frac{g}{r} \cos\varphi - \frac{g}{4r} \sin(\theta - \varphi) = 0 \end{cases}$$

4) Se P_1 e P_2 fossero uniti si avrebbe $\theta = \varphi$ e le equazioni di Lagrange forniscono
$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \cos\theta = 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{r} \cos\theta = 0 \end{cases}$$

e quindi il moto è possibile ed è governato dall'equazione

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{r} \cos\theta = 0}$$

Piccoli moti attorno a $\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ d)

Introducendo le variabili

$$\begin{cases} \alpha = \theta + \frac{3}{2}\pi \\ \beta = \varphi + \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

le equazioni di moto si scrivono come

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \frac{g}{r}\cos\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) + \frac{g}{4r}\sin(\alpha-\beta) = 0 \\ \ddot{\beta} + \frac{g}{r}\cos\left(\beta - \frac{3}{2}\pi\right) - \frac{g}{4r}\sin(\alpha-\beta) = 0 \end{cases}$$

$\cos\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) = \sin\alpha$, per cui ~~tale~~ le equazioni ~~a~~ linearizzate sono ~~fo~~

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \frac{g}{r}\alpha + \frac{g}{4r}(\alpha-\beta) = 0 \\ \ddot{\beta} + \frac{g}{r}\beta - \frac{g}{4r}(\alpha-\beta) = 0 \end{cases}$$

o anche:

$$\begin{cases} 4r\ddot{\alpha} + 5g\alpha - g\beta = 0 \\ 4r\ddot{\beta} - g\alpha + 5g\beta = 0 \end{cases}$$

A questo punto si cercano soluzioni della forma

$$\begin{cases} \alpha = A_1 \cos(\omega t + \alpha) \\ \beta = A_2 \cos(\omega t + \alpha) \end{cases}$$

si invitano gli studenti a completare i calcoli

$$\begin{cases} \theta = v^1 A_2^{(1)} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + v^2 A_2^{(2)} \cos(\omega_2 t + \alpha_2) - \frac{3}{2}\pi \\ \varphi = A_2^{(1)} \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + v^2 A_2^{(2)} \cos(\omega_2 t + \alpha_2) - \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

con $A_2^{(1)}, A_2^{(2)}, \alpha_1, \alpha_2$ costanti arbitrarie

$$\omega_1=\sqrt{\frac{7}{8}\frac{g}{r}}\quad,\quad \omega_2=\sqrt{\frac{3}{8}\frac{g}{r}}\quad,\quad V^1=\frac{g}{-4r\omega_1^2+5g}$$

$$V^2=\frac{g}{-4r\omega_2^2+5g}$$

Esercizio 2

1) Si tratta di un moto piano trattandosi di un punto soggetto esclusivamente all'azione di una forza centrale

2) Assunto come piano del moto il piano $z=0$, conviene adottare coordinate polari $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$

si ha $T=\frac{1}{2}(\dot\rho^2+\rho^2\dot\theta^2)$

Poiché $\underline{F}=-\frac{K}{\rho}|P-O|^2\,(P-O)=-\frac{K\rho^2}{\rho}(P-O) \Rightarrow U=-K\int\rho^2 d\rho$

cioè $U=-\frac{K}{3}\rho^3+\text{cost}$

$$\mathcal{L}=T+U=\frac{1}{2}m(\dot\rho^2+\rho^2\dot\theta^2)-\frac{K}{3}\rho^3$$

$$H=\left(\sum_{h=1}^{2}p_h\dot q_h-\mathcal{L}(q_1,q_2,\dot q_1,\dot q_2;t)\right)\Bigg|_{\dot q=\dot q(p,q;t)}$$

dove $q_1=\rho$, $q_2=\theta$ $\quad p_1=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\rho}=m\dot\rho$, $p_2=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}=m\rho^2\dot\theta$

si ha quindi $\dot\rho=\frac{p_1}{m}$, $\dot\theta=\frac{p_2}{m\rho^2}$ e l'hamiltoniana risulta

$$H(\rho,\theta,p_1,p_2)=\frac{p_1^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2m\rho}+\frac{K}{3}\rho^3$$

A questo punto è semplice scrivere le eq. di Hamilton !!