Soluzione prova scritta di Meccanica 2 (1)

del 01/02/2016

Indicata con ξ l'ascissa del punto P e con x l'ascissa del centro del disco si ha

$P=(\xi, 3R+\xi)$, $\bar{P}=(0, \xi+R)$

$C=(x, R)$

Il potenziale è dato:

$$U=-mg\,y_P-mg\,y_C-\frac{K}{2}(P-C)^2+\frac{1}{2}m(P-\bar{P})\omega^2+\frac{1}{2}I_y^{(disco)}\omega^2+\text{cost.}$$

[NOTA: le singole forze elastiche applicate in P e C non sono conservative, mentre è conservativa la coppia di tali forze e il potenziale di tale coppia è $-\frac{K}{2}(P-C)^2$] , $I_y^{(disco)}=I_C^{(disco)}+mx^2=\frac{m}{4}R^2+mx^2$

momento d'inerzia parallelo all'asse y e passante per C

Dopo semplici calcoli si trova:

$$U=-mg\xi-\frac{K}{2}(2\xi^2-2\xi x+x^2+4R\xi)+\frac{1}{2}m\frac{g}{R}(\xi^2+x^2)+\text{cost.}$$

Le configurazioni di equilibrio si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} RKx+(mg-2KR)\xi=mgR+2KR^2 \\ (mg-KR)x+KR\xi=0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di equazioni lineari. Risolvendolo, per esempio con il metodo di Cramer, si trova

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} mgR+2KR^2 & mg-2KR \\ 0 & KR \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} RK & -2KR+mg \\ mg-KR & KR \end{vmatrix}}=\frac{KR(mgR+2KR^2)}{(-K^2R^2-m^2g^2+3mgKR)}$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} RK & mgR+2KR^2 \\ mg-KR & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} RK & -2KR+mg \\ mg-KR & KR \end{vmatrix}}=\frac{(mgR+2KR^2)(KR-mg)}{-K^2R^2-m^2g^2+3mgKR}$$

(2)

Quindi se $K^2R^2 - 3mgKR + m^2g^2 \neq 0$

Cioè per $K \neq \left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)\frac{mg}{R}$

si ottiene ~~la posizione~~ l'unica sola configurazione di equilibrio

$$I) \quad (x = x_1, \ \xi = \xi_1)$$

con x_1 e ξ_1 aventi le espressioni date nella pagina precedente

È inoltre immediato verificare che per $K = K_1$ e $K = K_2$ $\left(K_1 = (3+\sqrt{5})\frac{mg}{2R} > 0, \ K_2 = (3-\sqrt{5})\frac{mg}{2R} > 0\right)$ il sistema non è compatibile poiché il rango della matrice dei coefficienti è uno mentre il rango della matrice completa è due (basta considerare il minore

$$\begin{vmatrix} RK_{1/2} & mgR + 2K_{1/2}R^2 \\ mg - K_{1/2}R & 0 \end{vmatrix} \neq 0)$$

Quindi si ha solo la configurazione di equilibrio I) (per $K \neq \left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)\frac{mg}{R}$)

Studio della stabilità:

Poiché $U_{\xi\xi} = -2K + \frac{mg}{R}$, $U_{\xi x} = U_{x\xi} = K$, $U_{xx} = -K + \frac{mg}{R}$

si ha
$$H(x,\xi) = \begin{vmatrix} -K + \frac{mg}{R} & K \\ K & -2K + \frac{mg}{R} \end{vmatrix}$$

$$= \left(-K + \frac{mg}{R}\right)\left(-2K + \frac{mg}{R}\right) - K^2 = K^2 - 3\frac{mg}{R}K + m^2g^2$$

Quindi se $K_1 < K < K_2$ l'hessiano è negativo e la configurazione ~~l'equilibrio~~ risulta essere una configurazione di equilibrio instabile.

I con $K = K_1$ e $K = K_2$ non devono essere considerati

Per $0 < K < K_1$ si verifica che $U_{\xi\xi} > 0$ e quindi U non possiede massimo per cui I) risulta essere ~~...~~ configurazione di equilibrio instabile.

Infine per $K > K_2$ si ha $U_{\xi\xi} > 0$ e quindi

U ~~convetta~~ possiede un massimo in I). | La configurazione I) risulta essere una configurazione di equilibrio stabile

Riassumendo: occorre fare lo studio della stabilità per $K > 0$
e ~~$K \neq K_1$~~ $K \neq \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) \frac{mg}{R}$

Si ha instabilità per I) quando $0 < K < K_1$ e $K_1 < K < K_2$

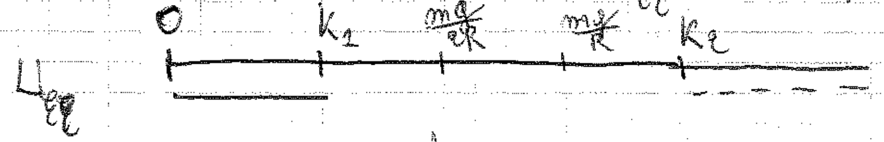
si ha Stabilità per la configurazione I se $K > K_2$

NOTA 1 PER LO STUDENTE.

Al fine di studiare la stabilità senza pasticciare con i calcoli può essere utile osservare che

$$K_1 < \frac{mg}{2R} \quad \text{e} \quad K_2 > \frac{mg}{R}$$

così si trova subito che $U_{\xi\xi} > 0$ per $K < \frac{mg}{2R}$ e poiché ~~bres~~ per $K_1 < K < K_2$ l'equilibrio è instabile...



NOTA 2 per $K_1 < K < K_2$ l'hessiano è negativo!

Equazioni di Lagrange

Per poterle scrivere occorre determinare l'espressione dell'energia cinetica del sistema.

Si $T = T_{disco} + T_p = \frac{1}{2} m v_p^2 + \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_{zC} \omega_{disco}^2$

momento parallelo all'asse z e passante per C.

Poiché $\omega_{disco}^2 = \frac{\dot{x}^2}{R^2}$, $I_{zC} = \frac{m}{2} R^2$

si ottiene la seguente espressione dell'energia cinetica

$$T = m\dot{\xi}^2 + \frac{3}{4} m \dot{x}^2$$

Quindi $\mathcal{L} = T + U = m\dot{\xi}^2 + \frac{3}{4} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{mg}{R}\left(\xi^2 + x^2\right) - mg\xi - \frac{K}{2}\left(2\xi^2 - 2\xi x + x^2 + 4R\xi\right)$

~~da cui le seguenti~~ e le equazioni esatte sono:

$$\begin{cases} 2m\ddot{\xi} - \left(\frac{mg}{R} - 2K\right)\xi - Kx + mg + 2KR = 0 \\ \frac{3}{2} m\ddot{x} + Kx - \frac{mg}{R}x - K\xi = 0 \end{cases}$$

Posto $K = 5\frac{mg}{R}$ passiamo allo studio delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione I)

Poiché per $K = 5\frac{mg}{R}$ si ha $x_1 = -5R$
$\xi_1 = -4R$

Il cambio di variabili

$$\begin{cases} \bar{\xi} = \xi + 4R \\ \bar{x} = x + 5R \end{cases}$$

conduce alle seguenti equazioni linearizzate

$$(1) \quad \begin{cases} 2m\ddot{\bar{\xi}} - \frac{mg}{2R}\left(-18\bar{\xi} + 10\bar{x}\right) = 0 \\ \frac{3}{2} m\ddot{\bar{x}} - \frac{mg}{2R}\left(10\bar{\xi} - 8\bar{x}\right) = 0 \end{cases}$$

A questo punto si può applicare la solita tecnica.
Si cercano soluzioni del tipo

$$\begin{cases} \bar{\xi} = A_1 \cos(\omega t + \alpha) \\ \bar{x} = A_2 \cos(\omega t + \alpha) \end{cases}$$

Sostituendo nel sistema (1) si perviene alla seguente equazione agli autovalori $(\omega^2 = \lambda)$

$$\left(-2R\omega^2 + 9g\right)\left(-3R\omega^2 + 8g\right) - 25g^2 = 0.$$

Si invitano gli studenti a completare i facili calcoli.

NOTA Preferisco invece mettere in evidenza come alle equazioni (1) di pagina (4) si posso arrivare anche scrivendo ~~l'ee~~ l'espressione all'ordine della lagrangiana.

Infatti si ha

$$\begin{cases} \bar{\xi} = \xi + 4R \\ \bar{x} = x + 5R \end{cases} \quad (2)$$

ed eseguendo il cambio di variabili si perviene alla seguente espressione di $\tilde{T} = m\dot{\bar{\xi}}^2 + \frac{3}{4} m\dot{\bar{x}}^2$

dopo aver effettuato il cambio (2) si può determinare la costante che appare nell'espressione del potenziale in modo che

$$U(\bar{\xi}=0, \bar{x}=0) = 0$$

e, tenuto conto che l'lagrangiano è costante,

$$\tilde{U}(\bar{x}, \bar{\xi}) = \frac{mg}{2R}\left(-9\bar{\xi}^2 + 10\,\bar{\xi}\bar{x} - 4\bar{x}^2\right)$$

Quindi l'espressione della lagrangiana "ridotta" che conduce alle equazioni (1) di pagina 4 è (lo studente lo verifichi)

$$\tilde{\mathcal{L}} = m\dot{\bar{\xi}}^2 + \frac{3}{4} m\dot{\bar{x}}^2 + \frac{mg}{2R}\left(-9\bar{\xi}^2 + 10\bar{\xi}\bar{x} - 4\bar{x}^2\right)$$