(1)

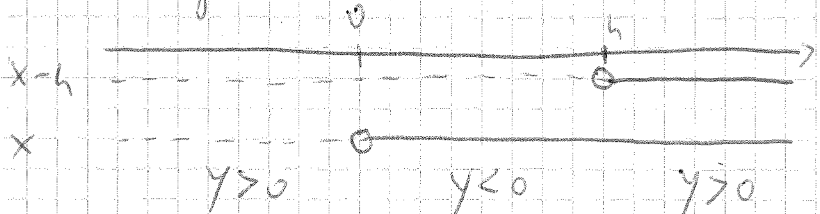
Correzione della seconda prova scritta parziale
del 13/01/2016

Ist. di Matematica 1 C.d.L Chimica

1) Studiare e tracciare il grafico della funzione $y = \frac{1}{x(x-4)}$

Dominio: ~~...~~ $\forall x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ e $x \neq 4$

La funzione non interseca gli assi cartesiani. È inoltre semplice verificare dove è positiva (negativa). Infatti il segno della $y = f(x)$ coincide con il segno del denominatore



cioè la funzione è positiva per $x<0$ e $x>4$, negativa per $0<x<4$

~~...~~ Occorre calcolare i limiti seguenti

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x(x-4)} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x(x-4)} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$

$x=0$ è un asintoto verticale (ovviamente non esistono asintoti obliqui)

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x(x-4)} = 0$$

, $y=0$ è un asintoto orizzontale

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{1}{x(x-4)} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{1}{x(x-4)} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

$x=4$ è un asintoto verticale

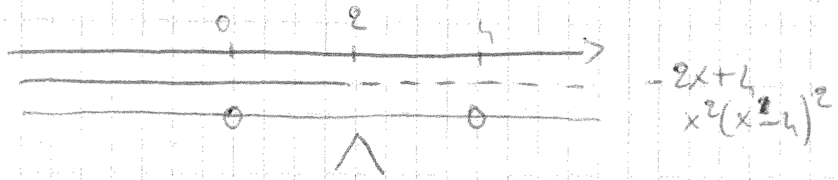
Determiniamo gli intervalli in cui la funzione è crescente/decrescente

$$y' = \frac{-[x-4+x]}{x^2(x-4)^2} = -\frac{(2x-4)}{x^2(x-4)^2}$$

Quindi anche la y' non è definita per $x=0$ e $x=4$. Inoltre (con l'eccezione di questi punti) il denominatore è sempre positivo e il segno della y'

coincide con il segno del numeratore $(-2x+4)$.

Quindi



Ovvero la funzione è crescente per $x<0$ e $0<x<2$, mentre risulta essere decrescente per $x<2$.

Per $x=2$ risulta avere un massimo relativo $M\left(2,-\frac{1}{4}\right)$

Infine stabiliamo dove la funzione risulta essere concava/convessa.
A tal fine occorre calcolare la derivata seconda.

Si ha: $$y'' = \frac{-2\left(x^2(x-4)^2\right)-(-2x+4)\left[2x(x-4)^2+2x^2(x-4)\right]}{x^4(x-4)^4}$$

$$= \frac{2x(x-4)\left(-x(x-4)-(-2x+4)\left[(x-4)+x\right]\right)}{x^4(x-4)^4}$$

$$= \frac{2\left(-x^2+4x-(-2x+4)(2x-4)\right)}{x^3(x-4)^3} = \frac{2\left(-x^2+4x+(2x-4)^2\right)}{x^3(x-4)^3}$$

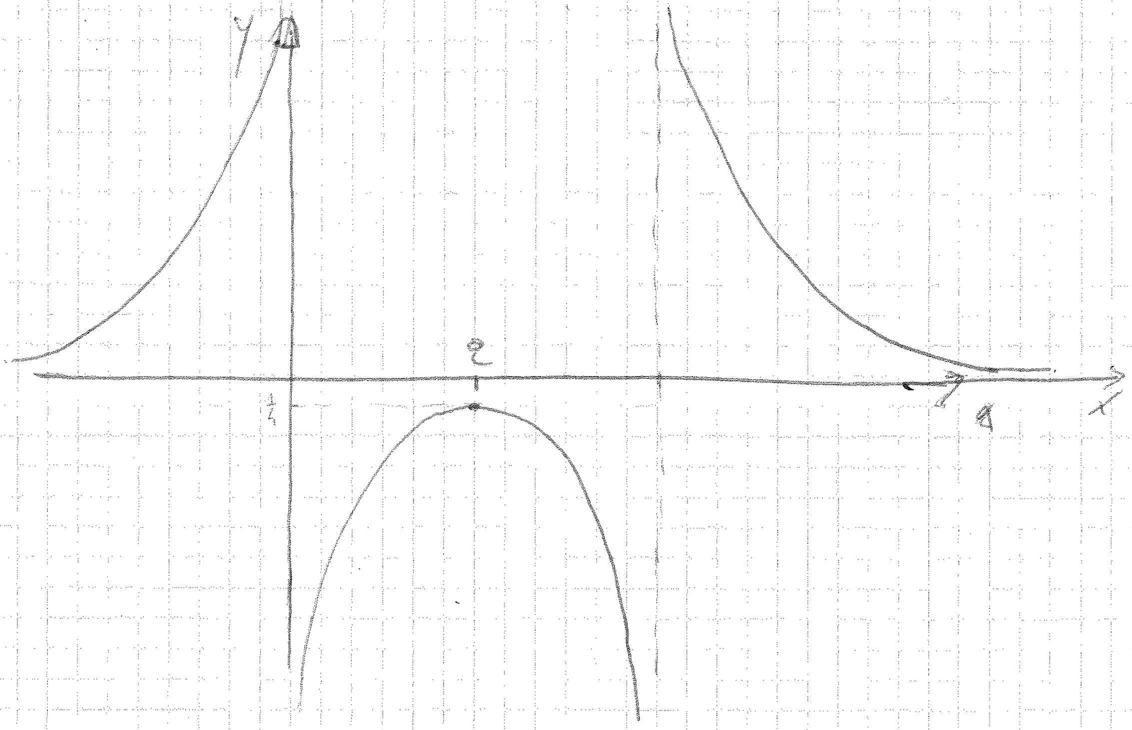
$$= \frac{2\left(3x^2-12x+16\right)}{x^3(x-4)^3}$$

cioè $y'' = \frac{2(3x^2-12x+16)}{x^3(x-4)^3}$ (anch'essa non è definita per $x=0$ e $x=4$)

e poiché $3x^2-12x+16$ non ammette radici reali si ha
$3x^2-12x+16>0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, quindi il segno della derivata seconda coincide con il segno del denominatore $x^3(x-4)^3$ ovvero con il segno della funzione stessa!!

cioè $y''>0$ per $x<0$ e $x>4$,
$y''<0$ per $0<x<4$

Inoltre poiché la $y''(x)$ non si annulla mai la funzione non presenta punti di flesso. Il grafico è riportato nella pagina successiva.



Esercizio 2

a. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{x^2-9x+20}\,dx$$

Poiché $x^2-9x+20=(x-4)(x-5)$, si cercano due costanti A e B tali che

$$\boxed{\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x-5}=\frac{1}{(x-4)(x-5)}} \qquad (1)$$

Poiché $\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x-5}=\frac{(A+B)x-5A-4B}{(x-4)(x-5)}$

la (1) è soddisfatta se e solo se

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -5A-4B=1 \end{cases}$$

Lo studente verifichi che tale sistema è soddisfatto per $A=-1$ e $B=1$.

Quindi $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-9x+20}\,dx = -\int \frac{1}{x-4}\,dx + \int \frac{1}{x-5}\,dx = \ln|x-5| - \ln|x-4| + c$

essendo c una costante arbitraria (<u>NOTA</u> può essere utile fare un altro passaggio e scrivere la totalità delle primitive come

$$\ln\left|\frac{x-5}{x-4}\right| + c.$$

b) Calcolare il seguente definito:

$$\int_1^2 \left(x e^{-x} + \frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}} \right) dx$$

Si ricorda che per calcolare un integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$ occorre preliminarmente calcolare una primitiva $G(x)$ di $f(x)$ e poi applicare la formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

Nel caso in esame sfruttando la linearità degli integrali si ha:

$$\int_1^2 x e^{-x}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx.$$

Occorre trovare una primitiva per $x e^{-x}$ e per ~~…~~ $\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

Si ha:

$$\int x e^{-x}\,dx \overset{\text{integrando per parti}}{=} -e^{-x}x + \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x+1) + c$$

Quindi una primitiva è, per esempio $-e^{-x}(x+1)$ (infatti $D(-e^{-x}(x+1)) = +e^{-x}(x+1) - e^{-x} = e^{-x}x$)

~~Il secondo integrale è i~~

Il calcolo ~~della grande~~ di una primitiva di $\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$ è immediato.

Si ha infatti $\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}} = x^{-\frac{3}{4}}$

e quindi $$\int x^{-\frac{3}{4}}\,dx = \frac{1}{\left(1-\frac{3}{4}\right)} x^{-\frac{3}{4}+1} = 4x^{\frac{1}{4}} + c$$

Quindi una primitiva ~~esatta~~ è, per esempio, $4x^{1/4}$ (lo studente lo verifichi eseguendo la derivata)

In definitiva,

$$\int_1^2 \left(x e^{-x} + \frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}} \right) dx = \int_1^2 x e^{-x}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx = -e^{-x}(x+1)\Big|_1^2 + 4x^{\frac{1}{4}}\Big|_1^2 =$$

$= -3e^{-2} + 2e^{-1} + 4\sqrt[4]{2} - 4$ ▨

Esercizio 3 _ 1) Verificare che i ~~seguenti~~ vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 3), \quad \underline{v}_2 = (0, 1, 2) \text{ e } \underline{v}_3 = (3, 0, 1)$$

sono linearmente indipendenti.

I vettori sono linearmente indipendenti se il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è diverso da zero. Infatti questo significa che il rango della matrice A è tre e il rango ~~è~~ il massimo numero di righe (colonne) linearmente indipendenti.

Essendo $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3(4-3) = 4 \neq 0$

i tre vettori sono linearmente indipendenti.

Un altro modo per verificare che i tre vettori sono linearmente indipendenti è ~~il seguente~~ fare ricorso alla definizione di vettori linearmente indipendenti.

Infatti i tre vettori sono linearmente indipendenti se ~~esiste~~ $\boxed{\alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2 + \gamma \underline{v}_3 = \underline{0}}$ (2) solo se $\alpha = \beta = \gamma = 0$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$

La condizione (2) è equivalente a

$\alpha(1, 2, 3) + \beta(0, 1, 2) + \gamma(3, 0, 1) = (0, 0, 0)$, ~~e~~ e quest'ultima comporta

$$\begin{cases} \alpha + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Come sappiamo un sistema di equazioni lineari e omogenee possiede sempre almeno la soluzione nulla. Se tale soluzione è l'unica soluzione del sistema allora i tre vettori sono linearmente indipendenti. Poiché la matrice dei coefficienti del sistema (3) è

$$A^{t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

che ora ha determinante diverso da zero (è infatti la trasposta della matrice A e per le proprietà dei determinanti $4 = \det A = \det A^{t} \neq$)

Quindi il rango della matrice dei coefficienti è uguale a tre (e questo è anche il rango della matrice completa) e il sistema possiede (∞^{3-3}) una ed una sola soluzione. Alla stessa conclusione si perviene anche osservando che A^{t} è invertibile e quindi il sistema

$A^{t}\underline{x} = \underline{0}$ ammette solo la soluzione nulla $\left(\underline{x} = (A^{t})^{-1}\underline{0} = \underline{0}\right)$.

b) Calcolare il prodotto scalare

$$\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = (1,2,3)\cdot(0,1,2) = 1\times 0 + 2\times 1 + 3\times 2 = 2+6 = 8$$

c) Calcolare il prodotto vettoriale

$$\underline{v}_2 \wedge \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{i} + 6\underline{j} - 3\underline{k}$$

4) Discutere il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} Kx + y + z = 1 \\ x + Ky + z = K \\ x + y + Kz = K^2 \end{cases}$$

Per il teorema di Rouché-Capelli

Il sistema è compatibile quando il rango della matrice dei coefficienti ~~è~~ è uguale al rango della matrice completa. Si ha

$$A = \begin{pmatrix} K & 1 & 1 \\ 1 & K & 1 \\ 1 & 1 & K \end{pmatrix}, \quad A|b = \begin{pmatrix} K & 1 & 1 & 1 \\ 1 & K & 1 & K \\ 1 & 1 & K & K^2 \end{pmatrix}$$

Quindi per i valori di K per cui il rango di A è tre ~~il sistema possiede (un una ed un~~ anche la matrice $A|b$ avrà rango ~~tre~~ tre

Il rango di A vale tre se il determinante di A è diverso da zero.

Si calcola facilmente

$$\begin{vmatrix} K & 1 & 1 \\ 1 & K & 1 \\ 1 & 1 & K \end{vmatrix} = K(K^2-1) - (K-1) + 1 - K$$

$$= K(K-1)(K+1) - 2(K-1)$$

$$= (K-1)\left[K^2 + K - 2\right]$$

$$= (K-1)^2 (K+2) \rightarrow \text{per } (K-1)(K+2) \neq 0$$

Quindi per ~~$K \neq 1$ e $K \neq -2$~~ il sistema possiede una e una sola soluzione (dipendente dal parametro K).

Tale soluzione si può trovare, per esempio, con il metodo di Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ K & K & 1 \\ K^2 & 1 & K \end{vmatrix}}{(K-1)^2(K+2)} = \frac{K^2 - 1 - (K^2 - K^2) + K - K^3}{(K-1)^2(K+2)} = \frac{-K^3 + K + K^2 - 1}{(K-1)^2(K+2)}$$

$$= \frac{-K(K^2-1) + K^2 - 1}{(K-1)^2(K+2)} = \frac{(K^2-1)(-K+1)}{(K-1)^2(K+2)}$$

$$= -\frac{K+1}{K+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & k^2 & k \end{vmatrix}}{(k-1)^2(k+2)} = \text{(completate voi i calcoli per esercizio)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & k \\ 1 & 1 & k^2 \end{vmatrix}}{(k-1)^2(k+2)} = \text{(completate i calcoli)}$$

Per $k=1$ il rango di A e quello della matrice A|b valgono uno.
Il sistema è compatibile (per teorema di Rouché-Capelli)
e possiede ∞^2 soluzioni. ~~Esse sono date~~
Per trovare tali soluzioni osserviamo che il sistema è equivalente all'unica equazione $x+y+z=1$ che ammette le soluzioni $(1-u-v, u, v)$ al variare di u e v in $\mathbb{R}$.

Per $k=-2$ il rango di A vale due potendosi estrarre, per esempio, il seguente minore non nullo $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$.

Il rango di $A|\underline{b}$ è invece tre, essendo diverso da zero il minore
$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$
(completi lo studente il calcolo di questo determinante.

Quindi per $k=-2$ il sistema è incompatibile.

Riassumendo: - Il sistema è compatibile se $(k-1)(k+2)\neq 0$ e possiede un'unica soluzione.
- Il sistema è incompatibile se $k=-2$
- se $k=1$ Il sistema è compatibile e possiede ∞^2 soluzioni.

Esercizio 5

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\1 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}7 & 2\\3 & 1\\4 & 0\end{pmatrix}$$

$$BC=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 2\\3 & 1\\4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14+3+16 & 4+1\\7+3+8 & 2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33 & 5\\18 & 3\end{pmatrix}$$

Quindi $H=A+BC=\begin{pmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}33 & 5\\18 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36 & 6\\18 & 5\end{pmatrix}$

Poiché $\det H=\begin{vmatrix}36 & 6\\18 & 3\end{vmatrix}=36\cdot 5-18\cdot 6=180-108=72\neq 0$

la matrice H è invertibile e la sua inversa è data da

$$H^{-1}=\frac{1}{\det H}\begin{pmatrix}H_{11} & H_{12}\\H_{21} & H_{22}\end{pmatrix}^{t}=\frac{1}{72}\begin{pmatrix}5 & -6\\-18 & 36\end{pmatrix}$$

dove H_{ij} denota il cofattore ~~dell'elemento~~ (o complemento algebrico) ~~(complemento~~ dell'elemento di posto ij.

Esercizio 6

La formula di Mac-Laurin è la formula di Taylor centrata in $x_0=0$

Quindi $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)$

Nel nostro caso $f(x)=e^{x^2}$, $n=4$

si verifica subito (fatelo per esercizio) che (o quasi subito)

$f'(0)=0$

$f''(0)=2$

$f'''(0)=0$

$f^{(IV)}(0)=12$

Quindi $f(x)=1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$