Soluzione della
Prova Scritta di "Istituzioni ed Esercitazioni di Matematica 1"
Corso di Laurea in Chimica
5/02/2016

1. Determinare le radici cubiche del numero complesso
$$\frac{2+i2\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $1+i\sqrt{3}$ si ottiene (si invitano gli studenti a svolgere tutti i passaggi):
$$\frac{2+i2\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2+i2\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\cdot\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \dots = -1+i\sqrt{3}$$

Occorre quindi calcolare le radici cubiche di $-1+i\sqrt{3}$

Si ha $-1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$. Applicando la formula della radice n-enna si ha:

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{2}{9}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{9}\pi\right)\right]$$
$$z_1 = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{8}{9}\pi\right) + i\sin\left(\frac{8}{9}\pi\right)\right]$$
$$z_2 = \sqrt[3]{}\left[\cos\left(\frac{14}{9}\pi\right) + i\sin\left(\frac{14}{9}\pi\right)\right]$$

2. Servendosi di opportuni limiti notevoli calcolare
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{5x+7}{5x+6}\right)$$

Il limite dato si può calcolare in molti diversi modi. Ricordando che $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, ad esempio, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{5x+7}{5x+6}\right) = 0\cdot\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{5x+6}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{5x+6}\right)^{\frac{5x+6}{(5x+6)\cdot x}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\left(1+\frac{1}{5x+6}\right)^{5x+6}\right)^{\frac{1}{(5x+6)x}} = \ln e^0 = \ln 1 = 0$$

② Oppure il limite può essere calcolato ancora più rapidamente nel seguente modo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{5x+7}{5x+6}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{5+\frac{7}{x}}{5+\frac{6}{x}}\right) = 0 \cdot 0 = 0$$

3) Studiare e tracciare il grafico della funzione

$$y = x\ln|x|$$

Poiché $|x|>0$ $\forall x$ ~~con~~ $x \neq 0$

La funzione è definita per $\forall x$, $x\neq 0$ o, se si preferisce, per $x \in (-\infty, 0)\cup(0,+\infty)$.

Si può scrivere

$$y = \begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ x\ln(-x), & x<0 \end{cases}$$

La precedente scrittura mette in evidenza che $f(-x) = -f(x)$ e quindi la funzione è dispari (simmetrica rispetto all'origine).

Si può quindi limitare e studiare la funzione per $x>0$ e sfruttare la trovata simmetria per determinare le proprietà per $x<0$.

Si ha $\lim_{x\to0^+} x\ln x = (0\cdot(-\infty)) = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to0^+} -\frac{1}{x}x^2 = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln(x) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

e poiché $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\ln x}{\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$ non esistono asintoti obliqui.

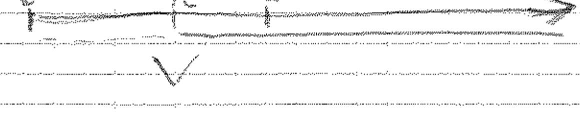
È inoltre immediato osservare che per $x>0$ la funzione è positiva per $x>1$ e negativa per $x<1$ e interseca l'asse x nel punto $A(1,0)$.

Per cercare massimi/minimi occorre calcolare la derivata prima.

Si ottiene

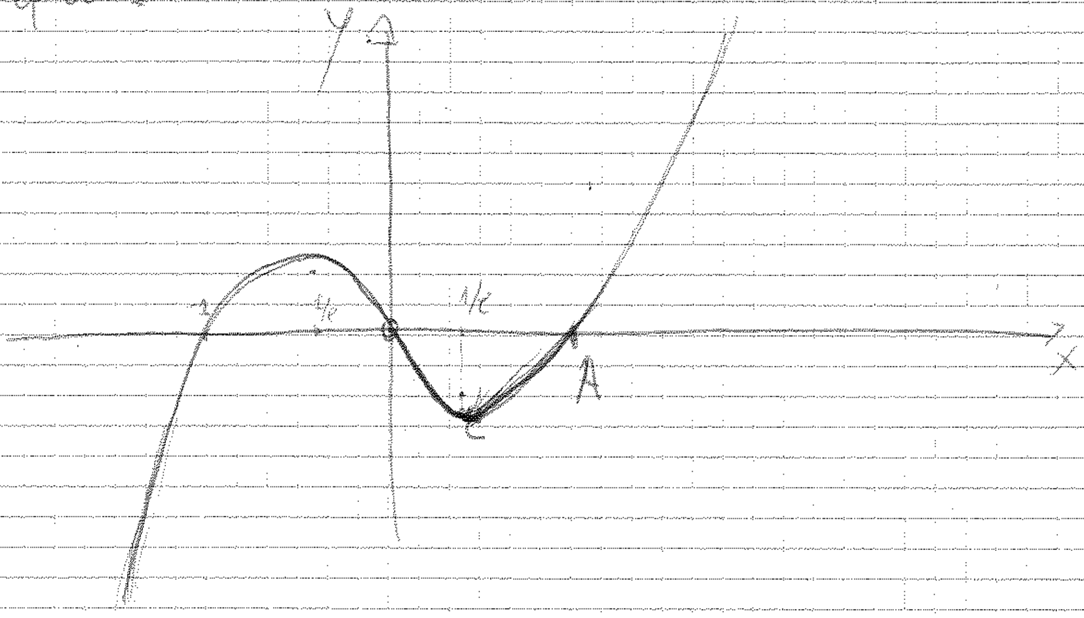
$$y' = \ln x + 1 \qquad y'=0 \iff \ln x + 1 = 0 \iff x = e^{-1}$$

Inoltre



Quindi la funzione è decrescente per $0<x<\frac{1}{e}$, crescente per $x>\frac{1}{e}$
e possiede un minimo relativo per $x=e^{-1}$, $C\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$

Infine è facile studiare la concavità/convessità della funzione.
Per $x>0$, si ha $y''=\frac{1}{x}$ e la funzione è convessa $\forall x>0$.
Tenendo conto della simmetria evidenziata all'inizio si perviene al seguente grafico:



4) Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 \left(\frac{3x-2}{x^2+6x+10} + xe^{3x}\right) dx$$

Si ha: $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x-2}{x^2+6x+10}\,dx + \int_0^1 xe^{3x}\,dx$

Occorre calcolare una primitiva dei due addendi.
Osserviamo che $x^2+6x+10=(x+3)^2+1$ e tale polinomio non ammette radici reali.

Si ha: $\displaystyle\frac{3x-2}{x^2+6x+10} = \frac{A}{x^2+6x+10} + \frac{B(2x+6)}{x^2+6x+10}$

Semplici calcoli conducono al sistema $\begin{cases} 2B=3 \\ 6B+A=-2 \end{cases}$

(4)

cioè $\begin{cases} B = \frac{3}{2} \\ A = -11 \end{cases}$

Per cui $\displaystyle\int_0 \frac{3x-2}{x^2+6x+10}\,dx = -11\int \frac{1}{(x+3)^2+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}\,dx$

$$= -11\,\text{arctg}(x+3) + \frac{3}{2}\ln(x^2+6x+10) + c$$

Invece una primitiva di xe^{3x} si determina integrando per parti

$$\int x e^{3x}\,dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx = e^{3x}\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) = \frac{e^{3x}}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) + c$$

Quindi l'integrale definito cercato si calcola nel seguente modo

$$\int_0^1 \frac{3x-2}{x^2+6x+10}\,dx + \int_0^1 xe^{3x}\,dx =$$

$$= \left[-11\,\text{arctg}(x+3) + \frac{3}{2}\ln(x^2+6x+10) + \frac{e^{3x}}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)\right]_0^1$$

$$= -11(\text{arctg}\,4 - \text{arctg}\,3) + \frac{3}{2}\left(\ln\frac{17}{10}\right) + \frac{e^3}{3}\,\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$$

Esercizio 5

a) $B+C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2 & 1+3 \\ 1-1 & 3+1 \\ -1-1 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$H = A \cdot (B+C) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+4\cdot 0-14 & 8+16 \\ 6-2 & 12+20 \end{pmatrix} =$

cioè $H = \begin{pmatrix} -10 & 24 \\ 4 & 32 \end{pmatrix}$ $\qquad \underline{v_1} = (-10 \quad 24)$, $\underline{v_2} = (4 \quad 32)$

b) La matrice A essendo rettangolare non è invertibile. (5)

Risulta invece invertibile la matrice H.

Infatti $\det H = -320 - 96 = -416$

Verifichi lo studente che $H^{-1} = \frac{1}{\det H}\begin{pmatrix} 32 & -24 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$

c) Due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo.
Nel caso dei vettori v_1 e v_2 si ha:

$$v_1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} -10 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 32 \end{pmatrix} = -40 + (24)(32) \neq 0$$

Quindi i vettori non sono ortogonali.

6) Discutere e risolvere il seguente sistema di equazioni lineari dipendenti dal parametro $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y = a - 1 \\ ax + y = 0 \\ (a-1)x - y = 3 \end{cases}$$

Denotiamo con A la matrice dei coefficienti e con $A|b$ la matrice completa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \\ a-1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A|b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ a & 1 & 0 \\ a-1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si noti come il rango della matrice A è al più due, mentre il rango della matrice $A|b$ potrebbe essere 3. Per i valori di a per cui il rango di $A|b$ è tre il sistema (per il teorema di Rouché-Capelli) non ammette soluzioni.

Poiché $\det A|b = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ a & 1 & 0 \\ a-1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -a(3+a-1) + 3 - (a-1)^2$

$$= -2(a^2 - 1)$$

Quindi per $a \neq \pm 1$ il rango di $A|b$ è tre e

$$2 = r(A) \neq r(A|b) = 3$$

Ossia se $a = 1$ la matrice A è: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ che

ha rango due potendosi estrarre per esempio il minore non nullo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Quindi, ~~infatti~~ se $a = 1$, $r(A) = r(A|b) = 2$ e il sistema possiede una ed una sola soluzione. Tale soluzione si ottiene considerando le ultime due righe del sistema (che corrispondono al minore non nullo sopra identificato). e si trova

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -y = 3 \end{cases}$$

da cui la soluzione $x = 3$, $y = -3$

Se $a = -1$ il rango di A vale nuovamente due (e quindi anche il rango di $A|b$ vale 2) potendosi estrarre, per esempio, il minore non nullo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Quindi anche per $a = -1$, $r(A) = r(A|b) = 2$ e il sistema possiede una ed una sola soluzione che si ottiene considerando le prime due righe del sistema (corrispondenti al minore non nullo sopra riportato!). Si ~~ottiene~~ deve così risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

da cui si trae immediatamente la soluzione $x = y = -1$