Traccia delle soluzioni
(esame del 2 Aprile 2016
CdS in Chimica) (1)

Esercizio 1.

Si tratta di calcolare le radici cubiche di $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

Si trova $z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$

$$z_1 = \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i)$$

$$z_2 = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = -i$$

Esercizio 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 3x + \sin x}{x^2 + x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\left(x^2 + 3 + \frac{\sin x}{x}\right)}{\cancel{x}(x+1)} = 4$$

Alternativamente potete applicare il teorema di De L'Hopital (perchè complicarsi la vita?!)

Esercizio 3.

L'insieme di esistenza è costituito da tutte le x per cui $tg\, x > 0$.

Quindi $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Poichè la funzione $y = \ln(tg\, x)$ è periodica di periodo π è sufficiente studiare tale funzione nell'intervallo $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e "estendere" le conclusioni ottenute fuori di questo intervallo per periodicità.

Ci limiteremo pertanto all'analisi per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ "prolungando" i risultati negli altri intervalli in cui è definita la funzione

La funzione $y = \ln(tg\,x)$ nell'intervallo $0 < x < \frac{\pi}{2}$ interseca l'asse x nel punto $A\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ è positiva per $x > \frac{\pi}{4}$ e negativa per $0 < x < \frac{\pi}{4}$, inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(tg\,x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \ln(tg\,x) = +\infty$$

Ricerca di eventuali punti di massimo/minimo per $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$y' = \frac{1}{tg\,x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}, \quad \boxed{x \neq 0 \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2}}$$

Poiché per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\sin x$ e $\cos x$ sono entrambe positive e non si annullano ($\sin x = 0$ per $x = 0$ e $\cos x = 0$ per $x = \frac{\pi}{2}$, ma $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$ non appartengono al dominio)

la funzione è, nell'intervallo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, strettamente crescente quindi non possiede punti di massimo/minimo relativi. Stessa conclusione vale in tutti gli intervalli in cui la $y = \ln(tg\,x)$ è definita

<u>Studio della concavità/convessità in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$</u>

Osserviamo che $y' = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$

Quindi $y'' = -\frac{4\cos 2x}{(\sin 2x)^2}$ $\quad \left(x \neq 0 \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2}\right)$

Si ha $y'' = 0 \iff \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

Inoltre $y'' > 0$ per $\cos 2x < 0$ (in questo modo $-4\cos 2x > 0$!) cioè per $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, mentre $y'' < 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{4}$

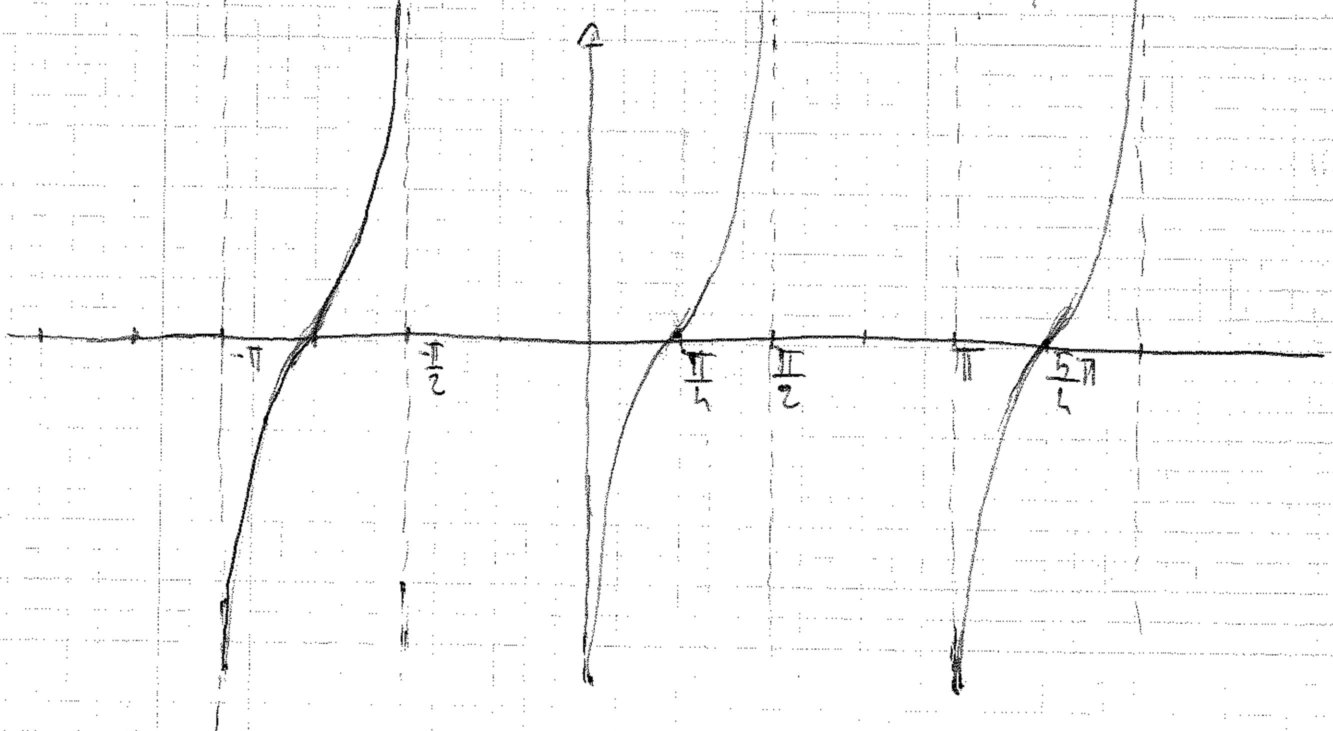
Quindi la funzione è convessa per $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$,

concava per $0 < x < \frac{\pi}{4}$

presenta un punto di flesso per $x = \frac{\pi}{4}$.

Anche in questo caso le conclusioni si estendono agli intervalli in cui la funzione è definita... Per esempio i punti di flesso si hanno per $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Il grafico è riportato sotto (vedi anche elaborazione fatta con il software Mathematica alla fine di questi fogli)



Esercizio 4

Poiché $x^3+1 = (x^2-4x+4)(x+4) + 12x - 15$

$$\int_0^1 \left(\frac{x^3-1}{x^2-4x+4}\right) dx = \int_0^1 (x+4)\,dx + \int_0^1 \frac{12x-15}{(x-2)^2}\,dx$$

Una primitiva di $x+4$ è $\frac{x^2}{2}+4x$, mentre una primitiva della funzione $\frac{12x-15}{(x-2)^2}$ si determina procedendo come ~~segue~~ segue:

(4) $$\frac{12x-15}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{Ax-2A+B}{(x-2)^2}$$

da cui $A=12$ e $B=9$

Quindi $$\int\left(\frac{12x-15}{(x-2)^2}\right)dx = \int\frac{12}{x-2}dx + \int\frac{9}{(x-2)^2}dx =$$
$$= 12\ln|x-2| - 9(x-2)^{-1} + c.$$

A questo punto per calcolare l'integrale definito basta applicare la regola fondamentale del calcolo integrale: si invitano gli studenti a completare il calcolo.

Esercizio 5 $a \in \mathbb{R}$

I) $$C = \begin{pmatrix} 3+a & 2a+1 \\ 3a & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_1 = (3+a, 2a+1)$$

$$\underline{v}_2 = (3a, 2)$$

II) La matrice C è invertibile per i valori di a per cui $\det C \neq 0$.
Poiché $\det C = -6a^2 - a + 6$
la matrice C è invertibile per $a \neq \frac{-1+\sqrt{145}}{12}$ e $a \neq \frac{-1-\sqrt{145}}{12}$.
Per $-6a^2-a+6 \neq 0$ l'inversa di C si ~~data~~ scrive nel seguente modo
$$C^{-1} = \frac{1}{-6a^2-a+6}\begin{pmatrix} 2 & -2a-1 \\ -3a & 3+a \end{pmatrix}$$

III) Poiché due vettori linearmente dipendenti sono proporzionali, i due vettori sono paralleli quando

$$6a^2+a-6=0 \qquad \left(\text{cioè per } a=\frac{-1\pm\sqrt{145}}{12}\right).$$

Infatti per i valori di a per cui $6a^2+a-6=0$ si ha $\det C=0$ e quindi i vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono linearmente dipendenti.

Altri modi per verificare che due vettori sono paralleli sono i seguenti:

a) verificare che il loro prodotto vettoriale sia nullo (verificatelo)

b) usando la definizione: cioè i due vettori son paralleli se $\boxed{\underline{v}_1=\lambda v_2}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $(\lambda\neq 0)$

$$\Updownarrow$$

$$(3+a)\,\underline{i}+(2a+1)\,\underline{j}=\lambda\left(3a\,\underline{i}+2\,\underline{j}\right)$$

e l'ultima condizione comporta

$$\begin{cases} 3+a=3\lambda a \\ 2a+1=2\lambda \end{cases}$$

Dalla seconda equazione del sistema ottengo $\lambda=\frac{2a+1}{2}$ che sostituita nella prima conduce a $\boxed{3+a=\frac{3}{2}(2a+1)a}$

→ questa è equivalente a $6a^2+a-6=0$ e quindi per tali valori di a i due vettori sono paralleli.

(6) Esercizio 6_

Il sistema essendo lineare e omogeneo possiede sempre <u>almeno</u> la soluzione nulla_

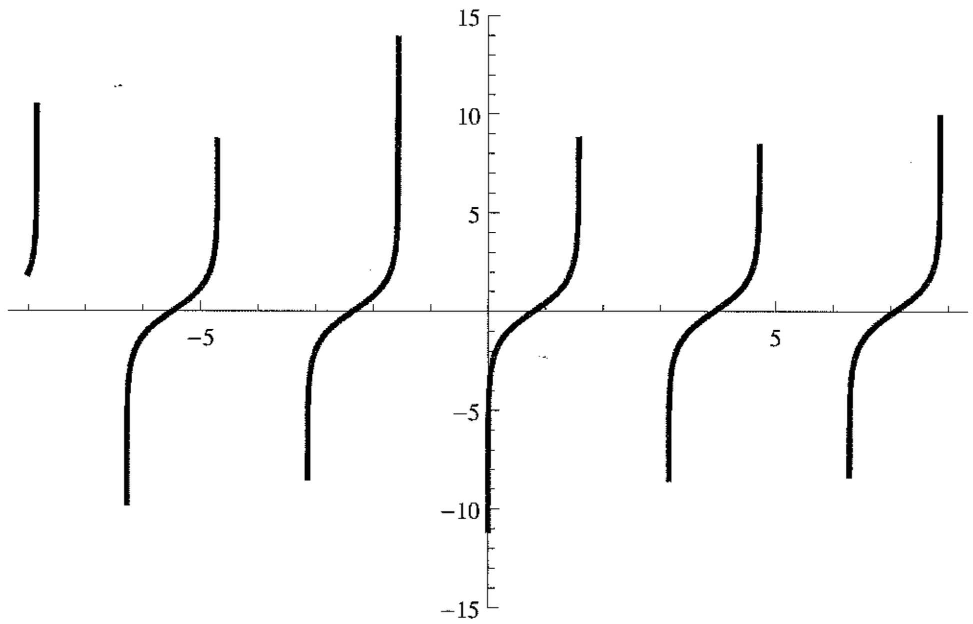
a) Si ha che se ~~[illegible]~~ $a^2-1 \neq 0$ il sistema possiede <u>solo</u> la soluzione nulla_

b) Se $a=1$ il sistema possiede ∞^1 soluzioni_ Un modo di esprimere tali soluzioni è $(x, -x, 0)$

c) Se $a=-1$ il sistema possiede ∞^1 soluzione. Un modo di esprimere tali soluzioni è $(0, -z, z)$

Ricostruite, basandovi sugli altri esercizi assegnati all'esame negli altri compiti d'esame, i dettagli (calcoli) che conducono a tali soluzioni.

Provate a risolvere/discutere il sistema sia con il teorema di Rouché-Capelli che con il metodo di Gauss_


15
10
5
−5
−10
−15
−5
5