Risultati e tracce di alcuni esercizi d'esame del 27/06/2016

"Istituzioni ed Esercitazioni di Matematica 1"

Corso di Laurea in Chimica

1. a) Calcolare $\sqrt[4]{-1}$ nel campo complesso

Tenuto conto che $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, e applicando le formule $z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$, con $k = 0, 1, \dots, n-1$

con $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

si trova: $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

b) Poiché $z^4+1=0 \Rightarrow z^4=-1$ e le soluzioni nel campo complesso di questa equazione sono evidentemente le radici quarte di -1 calcolate al punto precedente.

2) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x-4} - \sqrt[3]{x+8} = (+\infty - \infty) = \cancel{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x-4}-\sqrt[3]{x+8}\right)\sqrt[3]{(x-4)^2}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x-4} - \sqrt[3]{x+8}\right)\left(\sqrt[3]{(x-4)^2} + \sqrt[3]{(x-4)(x+8)} + \sqrt[3]{(x+8)^2}\right)}{\sqrt[3]{(x-4)^2} + \sqrt[3]{(x-4)(x+8)} + \sqrt[3]{(x+8)^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x-4-x-8}{\sqrt[3]{(x-4)^2} + \sqrt[3]{(x+4)(x+8)} + \sqrt[3]{(x+8)^2}} = 0$$

3) Studiare la funzione
$$y = \frac{e^x + 4}{e^x - 1}$$

La funzione è definita per $e^x - 1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{x \neq 0}$

La funzione è positiva per $e^x - 1 > 0$ (essendo $e^x + 4 > 0 \ \forall x$) e quindi per $x > 0$. Inoltre non interseca gli assi cartesiani.

Si ha: $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x + 4}{e^x - 1} = \frac{5}{0^+} = +\infty$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x + 4}{e^x - 1} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 4}{e^x - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}\left(1 + \frac{4}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + 4}{e^x - 1} = -4$$

Quindi $x = 0$ è un asintoto verticale mentre $y = 1$ e $y = -4$ sono asintoti orizzontali

Poiché $y' = \frac{e^x(e^x - 1) - (e^x + 4)e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-5e^x}{(e^x - 1)^2}$, ($x \neq 0$ cioè y e y' hanno lo stesso dominio)

Per $x \neq 0$ $(e^x - 1)^2 > 0$

Quindi $y' < 0$ $\forall x$ con $x \neq 0$, ovvero la funzione è strettamente decrescente in tutto il dominio e non ammette punti di max e/o minimo relativo

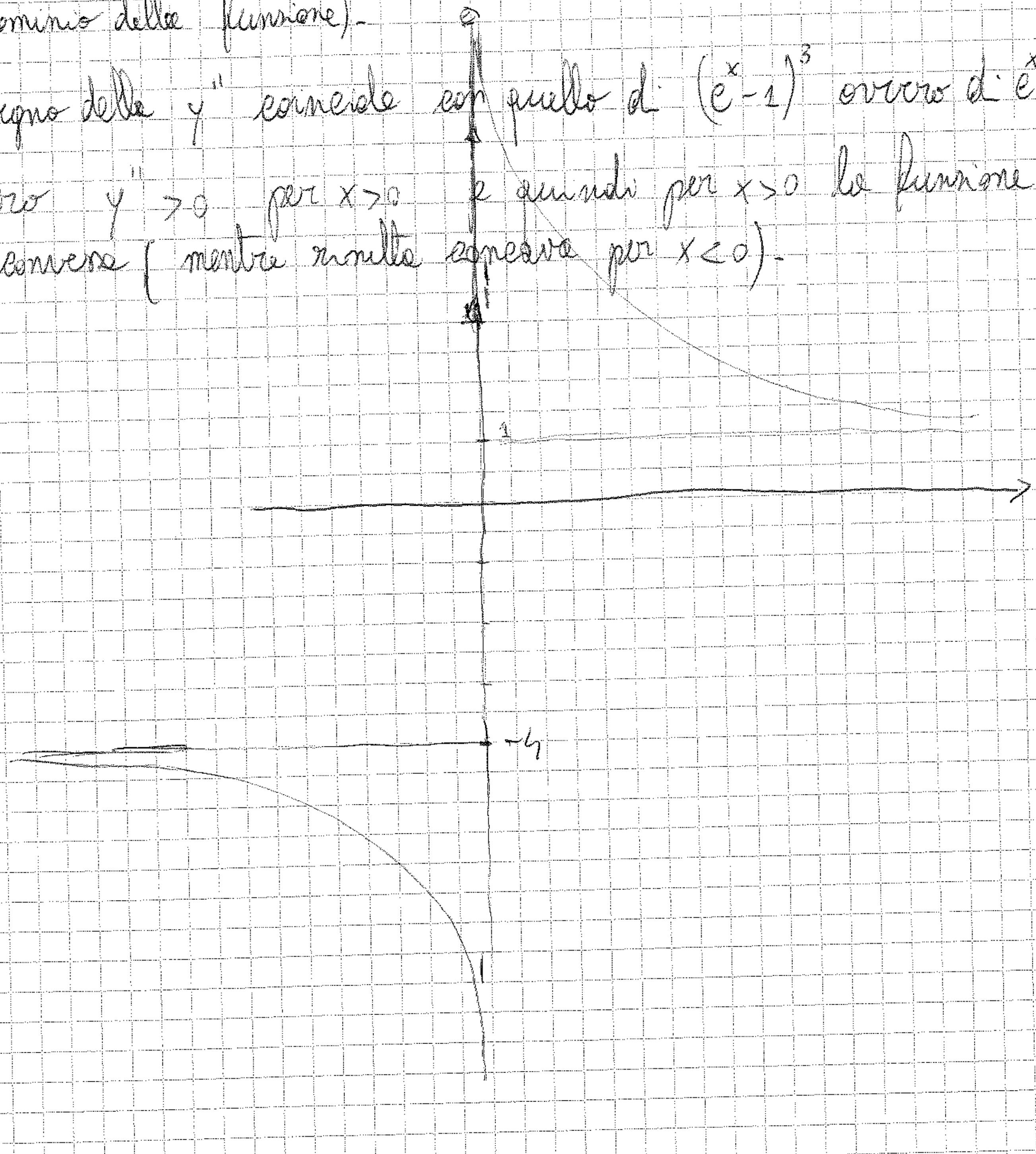
$$y'' = \frac{-5e^x(e^x-1)^2 + 10e^x(e^x-1)e^x}{(e^x-1)^4} = \frac{\cancel{(e^x-1)}\left[-5e^x(e^x-1) + 10e^{2x}\right]}{(e^x-1)^4}$$

cioè $$y'' = \frac{5e^{2x} + 5e^x}{(e^x-1)^3} = \frac{5e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^3}, \quad x \neq 0$$

Anche la y'' non è definita in $x=0$ (punto che non fa comunque parte del dominio della funzione).

Il segno della y'' coincide con quello di $(e^x-1)^3$ ovvero di e^x-1.

Ovvero $y''>0$ per $x>0$ e quindi per $x>0$ la funzione è convessa (mentre risulta concava per $x<0$).



4) Calcolare $\displaystyle\int_3^5 x \ln x \, dx$

Integrando per parti si trova subito ~~ecco~~ che le primitive della funzione $x \ln x$ sono date da

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx + \text{cost}$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \text{cost}$$

Perciò $\displaystyle\int_3^5 x \ln x \, dx = \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) \Bigg|_3^5 = \frac{25}{2} \ln 5 - \frac{25}{4} - \frac{9}{2} \ln 3 + \frac{9}{4}$

$$= \frac{25}{2} \ln 5 - \frac{9}{2} \ln 3 - 4$$

Esercizio 5

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 16 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

II) È immediato verificare che $\det C = 0$ e quindi la matrice non è invertibile

III) Se si considera $C\underline{x} = \underline{0}$, poiché la matrice C ha rango 2 (e tale sarà anche il rango della matrice completa trattandosi di un sistema omogeneo) perché $\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, il sistema possiede, per il teorema di Rouché-Capelli, ~~$\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni~~

$$\infty^{3-2} = \infty^1 \text{ soluzioni}$$

Per esercizio trovate tali soluzioni.

IV) Si invitano gli studenti a eseguire il calcolo di $\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2$ (dovete ottenere il vettore $(-2, -1, 3)$ e il prodotto scalare $\underline{v}_2 \cdot \underline{v}_3 = 68$)

6. Discutere e risolvere il seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} x+y+Kz=1 \\ x+Ky+z=1 \\ Kx+y+z=K \end{cases}, \quad K\in\mathbb{R}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & K \\ 1 & K & 1 \\ K & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A|\underline{b}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & K & 1 \\ 1 & K & 1 & 1 \\ K & 1 & 1 & K \end{pmatrix}$$

Il sistema è compatibile quando $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A|\underline{b})=r$ e possiede ∞^{n-r} soluzioni

Se ~~A~~ $\operatorname{rank}(A)=3$ allora anche $\operatorname{rank}(A|\underline{b})=3$

Poiché
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & K \\ 1 & K & 1 \\ K & 1 & 1 \end{vmatrix} = K-1-(1-K)+K(1-K^2)$$
$$=2(K-1)+K(1-K)(1+K)$$
$$=2(K-1)-K(K-1)(1+K)$$
$$=(K-1)\left[-K^2-K+2\right]=-(K-1)(K^2+K-2)$$
$$=-(K-1)^2(K+2)$$

Quindi se $(K-1)^2(K+2)\neq 0$ $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A|\underline{b})=3$

e il sistema possiede $\infty^{3-3}=$ 1 sola soluzione

Si invitano gli studenti a completare i calcoli determinando tale soluzione sotto l'ipotesi che sia $(K-1)^2(K+2)\neq 0$

Se $K=1$ il sistema si riduce a $x+y+z=1$ e possiede ∞^2 soluzioni $(t,\ s,\ 1-t-s)$, $t,s\in\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Se } K = -2}$

si ha $\operatorname{rank} A = 2$ perché $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

Occorre verificare ~~che cosa~~ quale sia il rango ~~della~~ della matrice completa $A|b$

~~Altro~~ Per il teorema di Kronecker, l'unico minore orlato di $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ che potrebbe essere non nullo è

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

(perché ci sono ~~le~~ due ~~righe~~ colonne uguali)

Quindi $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b) = 2$ e il sistema possiede $\infty^{3-2} = \infty^{1}$ soluzioni

che si trovano (completate i calcoli)

risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 - 2z \\ x - 2y = 1 - z \end{cases}$$

dove z è ora da considerarsi un parametro libero!