Soluzioni esercizi
Prova scritta Ist. ed Esercitazioni Matematica
22/01/2016

1. Determinare le radici quadrate del numero complesso $1-i$.

→ Dato il numero complesso ~~scritto~~ in forma trigonometrica ~~come~~ $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, le radici n-esime di z si ottengono ~~sono date dalla~~ nel seguente modo: $z=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$ con $k=0,1,\dots,n-1$

Nel caso dell'esercizio proposto $n=2$ e $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right)$

Le radici quadrate cercate sono dunque

$$z_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{7}{8}\pi\right)+i\sin\left(\frac{7}{8}\pi\right)\right)$$

$$z_1=\sqrt[4]{}\left(\cos\left(\frac{15}{8}\pi\right)+i\sin\left(\frac{15}{8}\pi\right)\right)$$

2. Servendosi esclusivamente dei limiti notevoli, calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\,tg(12x)}{x^3} \quad e \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+3}{5x}\right)^{4-5x}$$

→ Per calcolare il primo limite basta ricordare che

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \quad \text{(lo studente verifichi questo risultato)}$$

$$e \lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=1$$

Quindi $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\,tg(12x)}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}\,\frac{tg(12x)}{12x}\,12 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 12 = 6$

Per calcolare il secondo limite si farà uso del limite $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

Si trova $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+3}{5x}\right)^{4-5x}\overset{1^{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{5x}\right)^{4-5x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5x}{3}}\right)^4\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5x}{3}}\right)^{\frac{5x}{3}\cdot(-3)} = 1\cdot e^{-3}=e^{-3}$$

(5) Studiare e tracciare il grafico della funzione

$$y = |x|\, e^{-\frac{1}{x}}$$

L'insieme di esistenza è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (cioè $x \neq 0$)

La funzione è sempre positiva [essendo prodotto di funzioni positive (il modulo di x può annullarsi per $x=0$ che però non appartiene al dominio)] e non interseca gli assi cartesiani.

La funzione si può scrivere come $y = \begin{cases} x e^{-1/x}, & \text{per } x>0 \\ -x e^{-1/x}, & \text{per } x<0 \end{cases}$

Tale rappresentazione sarà utilizzata anche per calcolare le derivate e cercare eventuali punti di Massimo e/o minimo oltre che i limiti di sotto!!

Intanto si ha $\lim_{x \to 0^-} -x e^{-1/x} = (0 \cdot e^{+\infty}) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{-1/x} \overset{H}{=}$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{1/x^2\, e^{-1/x}}{1/x^2} = \lim_{x \to 0^-} e^{-1/x} = +\infty$$

cioè $\boxed{\lim_{x \to 0^-} -x e^{-1/x} = +\infty}$

Inoltre:

$$\lim_{x \to 0^+} x e^{-1/x} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0$$

È immediato calcolare $\lim_{x \to +\infty} x e^{-1/x} = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} -x e^{-1/x} = +\infty$.

Poiché $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \frac{x e^{-1/x}}{x} = 1 \\ \lim_{x \to +\infty} x(e^{-1/x} - 1) = \end{cases}$ e $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} \frac{-x e^{-1/x}}{x} = -1 \\ \lim_{x \to -\infty} -x(e^{-1/x} - 1) = \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} x(e^{-1/x} - 1) = \infty(0) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-1/x} - 1}{1/x} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} -e^{-1/x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} -x(e^{-1/x} - 1) = \infty(0)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-1/x} - 1}{-\frac{1}{x}} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to -\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$$

Quindi si hanno $\boxed{\text{due asintoti obliqui}}$

$y = x - 1$ (per $x \to +\infty$) e $y = -x + 1$ (per $x \to -\infty$)

C

Consideriamo la derivata prima: si ha

Per $x>0$, $y' = e^{-1/x} + x\frac{1}{x^2}e^{-1/x} = e^{-1/x}\left(1+\frac{1}{x}\right) = e^{-1/x}\left(\frac{x+1}{x}\right)$

cioè per $x>0$ $\quad y' = e^{-1/x}\left(\frac{x+1}{x}\right)$

Quindi per $x>0$ la y' non si annulla mai e risulta essere sempre positiva. Questo significa che per $x>0$ la funzione è strettamente crescente.

Per $x<0$, $y' = -e^{-1/x} - x\frac{1}{x^2}e^{-1/x} = -e^{-1/x}\left(\frac{x+1}{x}\right)$

Quindi per $x<0$ la derivata prima si annulla per $x=-1$.
Lo studio del segno della y' per $x<0$ è molto semplice

	$x<-1$	-1	$-1<x<0$	0
$-e^{-1/x}$	$-$		$-$	
x	$-$		$-$	
$x+1$	$-$		$+$	
		$\vee$		

Quindi per $x=-1$ si ha un punto di minimo relativo (la funzione è decrescente per $x<-1$ e crescente per $x>1$). Il punto di minimo ha coordinate $A=(1, e)$

Infine si può studiare la concavità/convessità della funzione mediante lo studio della derivata seconda.
Si trova

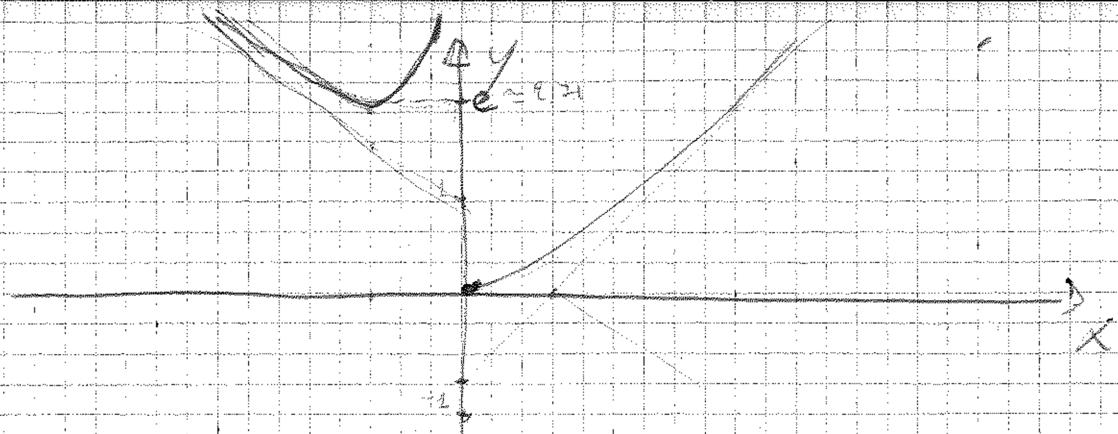
Per $x>0$ $\quad y'' = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x+1}{x^3} + \frac{x-x-1}{x^2}\right) = e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x+1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)$

cioè per $x>0$, $y'' = e^{-1/x}\left(\frac{1}{x^3}\right)$ e quindi $y''>0$ per $x>0$

cioè la funzione è convessa per $x>0$.

Per $x<0$, $y'' = -e^{-1/x}\left(\frac{1}{x^3}\right)$ e quindi la funzione è convessa anche per $x<0$.

Il grafico è riportato nella pagina seguente:



Esercizio 4) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^1 \left(\frac{2x}{x^2-8x+16} + x\cos x\right) dx$$

→ Per le proprietà di linearità si ha:

$$\int_0^1 \left(\frac{2x}{x^2-8x+16}\right) dx + \int_0^1 x\cos x \, dx$$

Occorre quindi determinare una primitiva ~~delle~~ per le funzioni $\frac{2x}{x^2-8x+16}$ e ~~di~~ $x\cos x$. NOTA: $x^2-8x+16=(x-4)^2$

Si ha $$\int \left(\frac{2x}{x^2-8x+16}\right) dx = \int \left(\frac{2x-8}{x^2-8x+16}\right) dx + 8\int \frac{dx}{x^2-8x+16} =$$

$$= \ln|x-4|^2 + 8\int \frac{dx}{(x-4)^2} = 2\ln|x-4| - \frac{8}{x-4}$$

Per trovare una primitiva di $x\cos x$ basta ~~eseguire~~ integrare per parti:

$$\int x\cos x\, dx = x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x$$

Per cui $$\int_0^1 \left(\frac{2x}{x^2-8x+16} + x\cos x\right) dx = \qquad \frac{8}{3} - 3$$

$$= 2\ln|x-4| - \frac{8}{x-4} + x\sin x + \cos x \Big]_0^1 = 2\ln 3 + \frac{8}{3} + \sin 1 + \cos 1 - 2\ln 4 \cancel{+2-1}$$

$$= 2\ln\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \sin 1 + \cos 1$$

Esercizio 5 (e)

Si considerino i vettori $\underline{v_1} = (\lambda, \lambda+1, 0)$, $\underline{v_2} = (1, 3, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

e) Stabilire per quali valori del parametro λ i vettori $\underline{v_1}$ e $\underline{v_2}$ sono linearmente indipendenti.

Poiché, per definizione il rango di una matrice è il massimo numero di ~~...~~ righe (colonne) linearmente indipendenti i due vettori saranno linearmente indipendenti per quei valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda+1 & 0 \\ 1 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$$

ha rango due.

~~Se tale matrice si estraggono ...~~ i minori di ordine due estraibili sono:

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda+1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\lambda - \lambda - 1 = 2\lambda - 1$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \quad e \quad \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)$$

Non esiste alcun valore di λ per cui i tre minori sono simultaneamente nulli per cui il rango è due $\forall \lambda \in \mathbb{R}$!

[Si può ragionare anche così: certamente per $\lambda \neq \frac{1}{2}$, $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq -1$ i tre minori sono nulli e quindi il rango è due.
Se $\lambda = \frac{1}{2}$ il primo minore si annulla ma sono diversi da zero il secondo e il terzo quindi anche per $\lambda = \frac{1}{2}$ il rango vale due
-- si invita lo studente a completare ~~lo studente~~ il ragionamento verificando che il rango è due anche $\lambda = 0$ e $\lambda = -1$].

Quindi i due vettori sono linearmente indipendenti $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

NOTA: Si arriva allo stesso risultato partendo dalla definizione di vettori lin. indipendenti. Infatti i due vettori sono lin. indipendenti se $\alpha \underline{v_1} + \beta \underline{v_2} = \underline{0}$ solo con $\alpha = \beta = 0$

(2) Quindi scrivendo

$$\alpha(\lambda, \lambda+1, 0) + \beta(1, 3, \lambda) = (0,0,0)$$

si ottiene
$$\begin{cases} \alpha\lambda + \beta = 0 \\ \alpha(\lambda+1) + 3\beta = 0 \\ \beta\lambda = 0 \end{cases}$$
nelle incognite λ e β

Si tratta di un sistema lineare omogeneo. Esso possiede sempre almeno la soluzione nulla. Se i vettori sono linearmente indipendenti allora tale soluzione dovrebbe essere anche l'unica. Per il teorema di Rouché-Capelli questo capita se la matrice

$$A^T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda+1 & 3 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ha rango due. Si noti come la condizione $r(A^T) = r(A^T|b)$ è sempre soddisfatta

da qui si procede come prima !!

Perché?

b) Stabilire per quali valori di $\lambda (\in \mathbb{R})$ i vettori v_1 e v_2 sono ortogonali.

→ Due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.

Poiché $v_1 \cdot v_2 = \lambda + 3(\lambda+1) = 4\lambda + 3$

I due v_1 e v_2 sono ortogonali se $4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{3}{4}$

cioè per $\lambda = -\frac{3}{4}$ i due vettori sono ortogonali !!

c) Ponendo $\lambda = 0$ $v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 3, 0)$

$$v_1 \wedge v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -k$$ o, equivalentemente

$$v_1 \wedge v_2 = (0, 0, -1)$$

Esercizio 6) Discutere e risolvere il seguente sistema di equazioni lineari dipendenti dal parametro $K \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y - Kz = 0 \\ x + Ky - z = 1 \\ x + (K+1)y + z = 0 \end{cases}$$

Per i valori di K per cui $r(A) = 3$ allora anche $r(A|b)$ vale 3 e per tali valori di K, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema possiede una ed una sola soluzione.

Affinché il rango di A valga tre, il determinante di A deve essere non nullo.

Poiché $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -K \\ 1 & K & -1 \\ 1 & K+1 & 1 \end{vmatrix} = (K+K+1) - 2 - K(K+1-K)$,

cioè $\det A = K - 1$.

Per cui per $K - 1 \neq 0$ cioè per $K \neq 1$ il sistema possiede una ed una sola soluzione!! Si invitano gli studenti a trovare tale soluzione.

Per $\boxed{K=1}$ il rango di A vale due potendosi estrarre il

minore $A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ (il rango di A ovviamente non è tre perché $\det A = 0$ se $K=1$)

Tuttavia il rango della matrice incompleta vale 3.

Infatti, (teor. di Kronecker) l'unico minore (diverso da quello coincidente con A) che orla il minore A_1 è

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$$

Quindi per $K=1$ $r(A) = 2 \neq r(A|b) = 3$ e per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è incompatibile