Esame

Istituzioni ed esercitazioni di Matematica I per Chimici del 18/07/2016

1. $$z_0 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$$
$$z_1 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(-\sqrt{3} + i\right)$$
$$z_2 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)$$
$$z_3 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(\sqrt{3} - i\right)$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{8^x - 7^x}{6^x - 5^x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\ln 8)\, 8^x - (\ln 7)\, 7^x}{(\ln 6)\, 6^x - (\ln 5)\, 5^x} = \frac{\ln 8 - \ln 7}{\ln 6 - \ln 5} = \frac{\ln \frac{8}{7}}{\ln \frac{6}{5}}$$

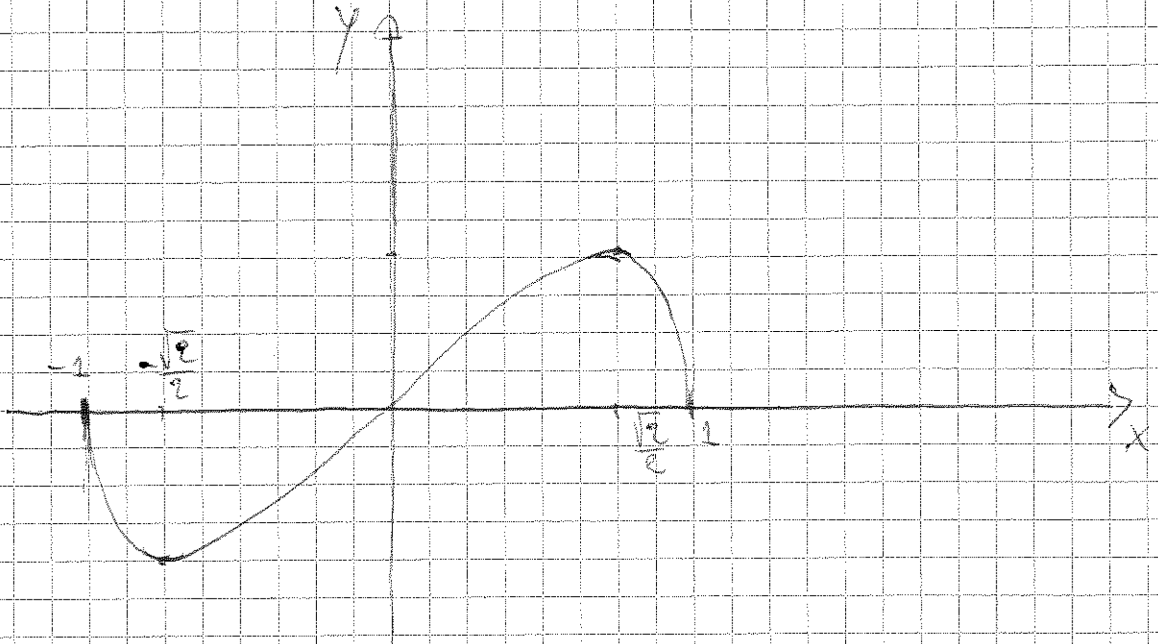
oppure $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{7}{5}\right)^x \left[\frac{\left(\frac{8}{7}\right)^x - 1}{\left(\frac{6}{5}\right)^x - 1}\right] =$$

→ applicare la formula di Taylor ai termini $\left(\frac{8}{7}\right)^x - 1$ e $\left(\frac{6}{5}\right)^x - 1$ troncata al primo ordine

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{7}{5}\right)^x \frac{\ln\left(\frac{8}{7}\right) \cancel{x}}{\ln\left(\frac{6}{5}\right) \cancel{x}} = \frac{\ln\left(\frac{8}{7}\right)}{\ln\left(\frac{6}{5}\right)}$$

3. La funzione è definita per $-1 \le x \le 1$ e risulta essere dispari. Possiede un minimo per $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e un massimo per $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
Inoltre è decrescente per $-1 \le x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$
Si osservi che la tangente nei punti $(-1,0)$ e $(1,0)$ al grafico della funzione è parallela all'asse y
Infine la funzione è convessa per $x>0$ e concava per $x<0$. L'origine è un punto di flesso. Si chiede allo studente di verificare tutti questi

risultati.



4) $\displaystyle\int_0^3 x^2 e^x\,dx = (x^2-2x+2)e^x\Big|_0^3 = (9-6+2)e^3-2 = 5e^3-2$

integrando due volte per parti.

5) $C = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

$\underline{v}_1 = (-11, 6, -1)$

$\underline{v}_2 = (-22, 12, -2)$

I vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono paralleli essendo proporzionali. Ciò risulta anche dal fatto che $\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2 = \underline{0}$.

Osservazione: La matrice C ha rango 1. Infatti la seconda riga è proporzionale alla prima (è due volte la prima), mentre la terza e prima riga coincidono.

II) Ne consegue che $\det C = 0$ (provarlo anche con un calcolo diretto) e la matrice C non è invertibile.

III) Inoltre, essendo il sistema $C\underline{x} = \underline{0}$ omogeneo il teorema di Rouché-Capelli dice che $r(C|\underline{0}) = r(C) = 1$ quindi il sistema è compatibile e possiede $\infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni (NOTA: le soluzioni del sistema sono le soluzioni dell'altra equazione omogenea $-11x+6y-z=0$ ovvero le terne $(t, s, 11t-6s)$ con $t, s \in \mathbb{R}$

$\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2 = \underline{0}$, $\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 2|\underline{v}_1|^2$

6) Per $a \neq 0$ il sistema è incompatibile

Per $a=0$ il sistema possiede l'unica soluzione $(1, 2)$

$x=1$

$y=2$