Università degli Studi di Cagliari
Dipartimento di Matematica

Prof. Sebastiano Seatzu

Analisi Complessa

29 settembre 2010

Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Elettronica

Indice

Capitolo 1

Analisi Complessa

1.1 Numeri complessi e funzioni complesse

Questo capitolo è dedicato alle funzioni complesse, ossia alle funzioni che, in un assegnato dominio del campo complesso, assumono valori complessi. Allo scopo di evitare incomprensioni, dovute a lacune su questioni di base, vengono premesse definizioni e proprietà fondamentali sui numeri complessi.

Si definisce unità immaginaria la soluzione dell'equazione $\mathrm{i}^2 + 1 = 0$, ossia $\mathrm{i}^2 = -1$. Ovviamente i non è un numero reale.

Per numero complesso si intende un qualsiasi numero del tipo $\alpha = a + \mathrm{i}b$, essendo a e b numeri reali. I numeri a e b sono definiti parte reale e immaginaria di α. Dunque $\mathrm{Re}(\alpha) = a$ e $\mathrm{Im}(\alpha) = b$. Ad esempio: $\mathrm{Re}(\sqrt{2} + 4\mathrm{i}) = \sqrt{2}$ e $\mathrm{Im}(\sqrt{2} + 4\mathrm{i}) = 4$.

Due numeri complessi sono uguali se e solo se sono uguali sia le parti reali sia quelle immaginarie. Ad esempio: $a + \mathrm{i}b = c + \mathrm{i}d$ se e solo se $a = c$ e $b = d$.

Di conseguenza la risoluzione di un'equazione nel campo complesso richiede che lo siano le parti reali e immaginarie. Ad esempio: $x^2 + (x + y)\mathrm{i} - 3 = 0$ implica la risoluzione del sistema

$$\begin{cases} x^2 - 3 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

dunque $x = \pm\sqrt{3}$ e $y = \mp\sqrt{3}$.

Le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione sono definite di conseguenza, ossia

$$\begin{aligned} (a + \mathrm{i}b) \pm (c + \mathrm{i}d) &= a \pm c + \mathrm{i}(b \pm d) \\ (a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) &= ac - bd + \mathrm{i}(bc + ad). \end{aligned}$$

Il complesso coniugato di un numero $\alpha = a + \mathrm{i}b$ è, per definizione, $\bar{\alpha} = a - \mathrm{i}b$. Da notare che $\alpha\bar{\alpha} = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2$, ossia che $\alpha\bar{\alpha}$ è reale anche se α è complesso.

Per ogni numero complesso $\alpha = a + \mathrm{i}b$ si definisce modulo di α, in simboli $|\alpha|$, il numero reale non negativo $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}}$. Ovviamente $|\alpha| \geq 0$ con $|\alpha| = 0$ se e solo se $\alpha = 0$. Ad esempio: $|1 - \mathrm{i}| = \sqrt{2}$.

Se $\beta \neq 0$, si definisce come rapporto α/β il numero

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a + \mathrm{i}b}{c + \mathrm{i}d} = \frac{\alpha\bar{\beta}}{\beta\bar{\beta}} = \frac{ac + bd + (bc - ad)\mathrm{i}}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i}$$

Come esempio si può considerare il rapporto tra $1 + 4\mathrm{i}$ e $2 - 3\mathrm{i}$:

$$\frac{1+4\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}} = \frac{(1+4\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}{(2-3\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})} = -\frac{10}{13} + \frac{11}{13}\mathrm{i}.$$

I numeri complessi ammettono una semplice interpretazione geometrica. Con riferimento agli assi cartesiani, un numero $\alpha = a + \mathrm{i}b$ può essere identificato come il punto di coordinate (a, b), ma anche come il vettore $a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ (Figura 1.1), essendo $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ i versori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ degli assi coordinati x e y rispettivamente.

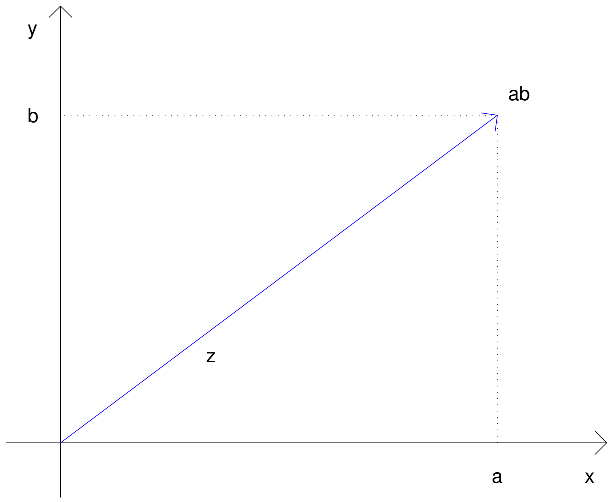


Figura 1.1:

È utile notare che $\bar{\alpha}$ rappresenta un punto del piano in posizione simmetrica rispetto ad α, relativamente all'asse dell'ascisse, e che il modulo di α rappresenta la lunghezza euclidea del vettore $a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$, ossia la distanza del punto (a, b) dall'origine.

La somma di due numeri complessi $(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d)$, in virtù della loro interpretazione geometrica, può essere associata al vettore $(a+c)\boldsymbol{i}+(b+d)\boldsymbol{j}$, ottenibile da $(a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j})+(c\boldsymbol{i}+d\boldsymbol{j})$ mediante la regola del parallelogramma. È anche immediato osservare che

$$|(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d)| \leq |a + \mathrm{i}b| + |c + \mathrm{i}d|,$$

essendo

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Tale relazione corrisponde al fatto, ben noto dalla scuola Euclidea, che in un triangolo la lunghezza di qualsiasi lato è minore o uguale alla somma delle lunghezze degli altri due. Dalla precedente interpretazione segue che la distanza tra i punti $\alpha = (a, b)$ e $\beta = (c, d)$ è data da

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}.$$

Esercizio 1.1 *Determinare il luogo dei punti z per cui $|z| = 1$. Si tratta evidentemente della circonferenza con centro l'origine e raggio 1, ossia dei punti (x, y) con $x^2 + y^2 = 1$. La relazione $|z| \leq 1$ indica invece il cerchio unitario, ossia l'insieme dei punti (x, y) del piano con $x^2 + y^2 \leq 1$.*

Esercizio 1.2 *Determinare i numeri complessi z tali che $|z - 2 + 4\mathrm{i}| < 3$. Si tratta dei punti interni al cerchio di centro $2 - 4\mathrm{i}$ e raggio 3.*

Esercizio 1.3 *Determinare z in modo che $|z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z^2) = 4$. Posto $z = x + \mathrm{i}y$, deve risultare $x^2 + y^2 + 2(x^2 - y^2) = 3x^2 - y^2 = 4$, per cui l'equazione rappresenta l'iperbole $x^2 - \frac{1}{3}y^2 = \frac{4}{3}$.*

Esercizio 1.4 *Verificare la validità, nel campo complesso, della formula sul binomio di Newton*

$$(\alpha + \beta)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^{n-j}\beta^j,$$

dove n è un numero naturale e

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

è il j-esimo coefficiente del binomio di Newton.

Dimostrazione. *Procedendo per induzione, è sufficiente osservare che la relazione è valida per $n = 1$ e che, supponendo sia valida per $n = 1, 2, \ldots, k$, è valida anche per $n = k+1$. Per $n = 1$, è immediata, essendo (per definizione)*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Per n=k+1, essendo la formula valida per k, si ha

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)^{k+1} &= (\alpha + \beta)^k(\alpha + \beta) = \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \alpha^{k-j}\beta^j\right](\alpha + \beta) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \alpha^{(k+1)-j}\beta^j + \sum_{r=1}^{k+1} \binom{k}{r-1} \alpha^{(k+1)-r}\beta^r \qquad (r = j+1) \\
&= \binom{k}{0} \alpha^{k+1}\beta^0 + \sum_{j=1}^{k} \left[\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1}\right] \alpha^{(k+1)-j}\beta^j + \binom{k}{k} \alpha^0\beta^{k+1} \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \alpha^{(k+1)-j}\beta^j
\end{aligned}$$

dato che

$$\begin{aligned}
\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} &= \frac{k!}{j!(k-j)!} + \frac{k!}{(j-1)!(k-j+1)!} \\
&= \frac{k!}{j!(k-j+1)!}(k - j + 1 + j) \\
&= \frac{k!(k+1)}{j!((k+1)-j)!} = \binom{k+1}{j}.
\end{aligned}$$

Il risultato è pertanto valido, anche nel campo complesso, qualunque sia il numero naturale n. □

Forma polare. Ad ogni numero $\alpha = a + \mathrm{i}b$, si può associare il punto (a, b) del piano complesso (Figura 1.2), a sua volta identificabile mediante le coordinate polari (ρ, θ), essendo $a = \rho\cos\theta$ e $b = \rho\sin\theta$.

Di conseguenza $\alpha = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ è la rappresentazione polare di α, essendo ρ la lunghezza del vettore $a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ e $0 \le \theta < 2\pi$ la misura in radianti della rotazione positiva (senso

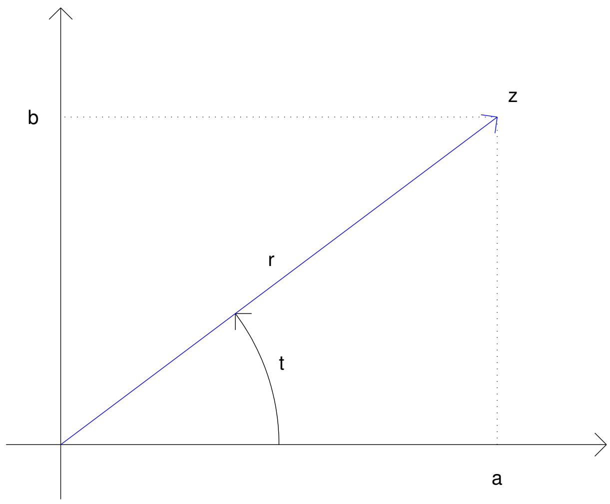


Figura 1.2:

antiorario) necessaria per sovrapporre l'asse x al vettore $a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$. Le coordinate polari ρ e θ vengono rispettivamente definite modulo e argomento di α, essendo $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ e $\theta = \arctan\frac{b}{a}$.[1] Come esempio si possono considerare:

$$\begin{aligned} 1+\mathrm{i} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}) \\ -1+\mathrm{i} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{3}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi). \end{aligned}$$

Proprietà fondamentali:

1. $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$;
2. se $\beta \neq 0$, $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$;
3. $\arg(\alpha\beta) = \arg(\alpha) + \arg(\beta)$;
4. se r è un numero positivo, α e $r\alpha$ hanno lo stesso argomento.

Dimostrazione. Limitiamoci a dimostrare le proprietà 1. e 3. Posto $\alpha = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ e $\beta = r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \rho r[(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + \mathrm{i}(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)] \\ &= \rho r[(\cos(\theta+\phi) + \mathrm{i}\sin(\theta+\phi))] \end{aligned}$$

per cui $|\alpha\beta| = \rho r$ e $\arg(\alpha\beta) = \arg(\alpha) + \arg(\beta)$. □

Esercizio 1.5 *Se* $\alpha = 2\mathrm{i}$ *e* $\beta = 3(1+\mathrm{i})$,

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

[1] Se $a < 0$ al valore di θ si deve aggiungere π per via della periodicità della tangente.

e

$$\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Teorema 1.1 (Formula di de Moivre) *Per ogni intero n e ogni numero reale θ,*

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta.$$

Dimostrazione. La formula è ovviamente valida per $n = 1$. Per ogni intero positivo, in conseguenza della proprietà 3,

$$\arg(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = n\arg(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = n\theta$$

e di conseguenza il risultato è corretto, essendo $\rho = 1$. Per $n = -m$, con m intero positivo,

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n &= \frac{1}{(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^m} = \frac{1}{\cos m\theta + \mathrm{i}\sin m\theta} \\ &= \cos m\theta - \mathrm{i}\sin m\theta\end{aligned}$$

e dunque,

$$\arg(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{-m} = -m\theta.$$

□

Esercizio 1.6 *Verificare l'identità trigonometrica di Lagrange*

$$\sum_{j=0}^{n}\cos j\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\theta]}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

nell'ipotesi che $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$.

Dimostrazione. Se $\alpha = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, *si ha* $\alpha^j = \cos j\theta + \mathrm{i}\sin j\theta$, *per cui* $\cos j\theta = \mathrm{Re}(\alpha^j)$ *e dunque*

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\cos j\theta &= \mathrm{Re}\Big(\sum_{j=0}^{n}\alpha^j\Big) = \mathrm{Re}\,\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \qquad (\alpha \neq 1) \\ &= \mathrm{Re}\,\frac{(1-\cos(n+1)\theta) - \mathrm{i}\sin(n+1)\theta}{(1-\cos\theta) - \mathrm{i}\sin\theta} \\ &= \frac{[1-\cos(n+1)\theta](1-\cos\theta) + \sin(n+1)\theta\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} \\ &= \frac{1-\cos\theta - \cos(n+1)\theta + \cos n\theta}{2(1-\cos\theta)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{(1-\cos\theta)\cos n\theta + \sin n\theta\sin\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos n\theta + 2\sin n\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}.\end{aligned}$$

□

Radici n-esime dell'unità. Sia n un intero positivo. Il numero z è una radice n-esima dell'unità se $z^n = 1$. Posto $z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, per la formula di de Moivre deve dunque risultare

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) = 1,$$

ossia $\rho = 1$ e $n\theta = 2k\pi$ ($k = 0, \pm1, \pm2, \dots$). In conseguenza della periodicità di $\cos n\theta$ e $\sin n\theta$, si ottengono n radici distinte dell'unità ponendo

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Per qualunque altro valore intero di k si ottengono radici già ottenute di z_k. Ragionando allo stesso modo è immediato dimostrare che se $\alpha = r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$ le sue radici n-esime sono

$$\beta_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right),$$

con $k = 0, 1, \dots, n-1$. Ad esempio:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{1} &= \cos\frac{2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{4} \qquad (k = 0, 1, 2, 3)\\ &= \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}\end{aligned}$$

Esercizio 1.7 *Determinare le radici quarte di* $1 - \mathrm{i}$.
Poiché $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{7}{4}\pi\right)$,

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{1-\mathrm{i}} &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{7}{4}\pi + 2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{7}{4}\pi + 2k\pi}{4}\right)\\ &= 2^{1/8}\left[\cos\left(\frac{7}{16}\pi + k\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7}{16}\pi + k\frac{\pi}{2}\right)\right], \qquad k = 0, 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Le definizioni e le principali proprietà sugli insiemi dei numeri reali possono formalmente estendersi al campo complesso senza particolari difficoltà. Questo vale in particolare per le seguenti definizioni:

Punto interno: un numero α di un insieme S è un punto interno ad S se esiste un cerchio centrato in α contenente soltanto punti di S.

Punto di frontiera: un numero α di un insieme S è un punto di frontiera per S se ogni cerchio centrato in α contiene punti di S e punti non di S.

Insieme aperto: S è un insieme aperto se tutti i sui punti sono interni.

Frontiera: la frontiera di S è l'insieme dei punti di frontiera di S.

Punto di accumulazione: un numero α è un punto di accumulazione per un insieme S se ogni intorno di α contiene punti di S.

Un insieme S di numeri complessi è **limitato** se esiste un cerchio di diametro finito che lo contiene. Si definisce **compatto** un insieme chiuso e limitato.

Teorema 1.2 (Bolzano-Weierstrass) *Un insieme infinito e compatto possiede almeno un punto di accumulazione.*

Insieme chiuso: S è un insieme chiuso se tutti i suoi punti di accumulazione appartengono ad S.

Limite: Il numero L è il limite di una successione $\{z_n\}$ se per ogni numero positivo ϵ esiste un $n(\epsilon)$ tale che per ogni $n > n(\epsilon)$

$$|z_n - L| < \epsilon$$

Se un tale numero non esiste, si dice che $\{z_n\}$ diverge.

Proprietà: Sia $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ per ogni intero positivo n e $L = a + \mathrm{i}b$. Allora $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = L$, se e solo se $x_n \to a$ e $y_n \to b$. In parole z_n converge se e solo se convergono la sua parte reale e la sua parte immaginaria. Ad esempio:

$$z_n = \frac{3}{n} + \frac{n+1}{n+2}\mathrm{i} \to \mathrm{i}$$

in quanto

$$\frac{3}{n} \to 0 \quad \text{e} \quad \frac{n+1}{n+2} \to 1.$$

Al contrario, la successione $z_n = \cos n + \mathrm{i}\sin n$ diverge, in quanto non esistono i limiti di $\cos n$ e $\sin n$ per $n \to +\infty$.

Proprietà: Siano $z_n \to L$ e $w_n \to K$, allora

1. $z_n + w_n \to L + K$;
2. $\alpha z_n \to \alpha L$, per ogni numero α;
3. $z_n w_n \to LK$;
4. $\dfrac{z_n}{w_n} \to \dfrac{L}{K}$, se $w_n \neq 0$ per ogni n e $K \neq 0$

Successione di Cauchy. Una successione $\{z_n\}$ è di Cauchy se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un intero positivo $n(\epsilon)$ tale che $|z_n - z_m| < \epsilon$, qualunque siano $n > n(\epsilon)$ e $m > n(\epsilon)$.

Teorema 1.3 *Una successione $\{z_n\}$ è convergente se e solo se è di Cauchy.*

Esercizio 1.8 *Sia $\{z_n\} = \frac{1}{2}(z_{n-1}+z_{n-2})$ per $n \geq 3$, con z_1 e z_2 valori complessi assegnati. Dimostrare che $\{z_n\}$ è una successione di Cauchy. Osserviamo preliminarmente che*

$$\begin{aligned}
|z_3 - z_2| &= \frac{1}{2}|z_2 - z_1| \\
|z_4 - z_3| &= \frac{1}{2}|z_3 - z_2| = \frac{1}{2^2}|z_2 - z_1| \\
&\vdots \\
|z_n - z_{n-1}| &= \frac{1}{2^{n-2}}|z_2 - z_1|, \qquad n \geq 3.
\end{aligned}$$

Di conseguenza, posto $n = m + p$,

$$\begin{aligned}
|z_n - z_m| = |z_{m+p} - z_m| &= |(z_{m+p} - z_{m+p-1}) + (z_{m+p-1} - z_{m+p-2}) + \cdots + (z_{m+1} - z_m)| \\
&\leq |z_{m+p} - z_{m+p-1}| + |z_{m+p-1} - z_{m+p-2}| + \cdots + |z_{m+1} - z_m| \\
&= \left(\frac{1}{2^{m+p-2}} + \frac{1}{2^{m+p-3}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} \right) |z_2 - z_1| \\
&= \frac{1}{2^{m-1}} \left(\frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-2}} + \cdots + 1 \right) |z_2 - z_1| \\
&= \frac{1}{2^{m-1}} \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} |z_2 - z_1| < \frac{1}{2^{m-2}} |z_2 - z_1|,
\end{aligned}$$

che, ovviamente, converge a zero per $m \to +\infty$.

Serie di numeri complessi. Se $\{z_n\}$ è una successione di numeri complessi, con il simbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

si indica una serie a termini complessi. Come nel campo reale

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

indica la n-esima somma parziale della serie e $\{S_n\}$ è la successione delle somme parziali. La serie converge/diverge a seconda che la successione sia convergente o divergente in $\mathbb{C}$.

Per le serie a termini complessi valgono i seguenti teoremi:

Teorema 1.4 *Se $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$, valgono i seguenti risultati:*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge se e solo se convergono le serie a termini reali*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \textit{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n;$$

2. *Se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge a x e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n \to y$, *la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n \to x + \mathrm{i}y$.

Teorema 1.5 *Condizione necessaria perché la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *sia convergente è che $z_n \to 0$.*

Teorema 1.6 *Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza della serie è che la successione delle sue somme parziali sia di Cauchy, ossia che prefissato $\epsilon > 0$, esista un $n(\epsilon)$ tale che, qualunque siano $n > n(\epsilon)$ e l'intero positivo p, risulti*

$$|z_{n+p} + z_{n+p-1} + \cdots + z_{n+1}| < \epsilon.$$

Teorema 1.7 (Criterio della assoluta sommabilità) *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *converge, anche la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge. Questo significa che nel campo complesso, come in quello reale, l'assoluta sommabilità di una serie implica la semplice sommabilità. Ovviamente non vale l'inverso.*

Ad esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \ln 2$$

mentre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Teorema 1.8 (Criterio del rapporto) *Se* $z_n \neq 0$ *per ogni* n *e se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = r,$$

allora:

1. *la serie è assolutamente convergente e di conseguenza anche semplicemente se* $0 < r < 1$*;*

2. *la serie è assolutamente divergente per* $r > 1$.

Da notare che se $r = 1$ la serie può essere convergente ma anche divergente. Ad esempio la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente, mentre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente.

Esercizio 1.9 *Dimostrare che*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

se $|z| < 1$ *e che essa diverge per* $z \geq 1$. *Posto* $S_n = 1 + z + \cdots + z^{n-1}$ *e osservato che* $zS_n = z + z^2 + \cdots + z^n$, *sottraendo membro a membro si ha che* $(1-z)S_n = 1 - z^n$, *da cui, se* $z \neq 1$,

$$S_n = \frac{1-z^n}{1-z}.$$

Pertanto, se $|z| < 1$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-z}$. *Per* $z = 1$, $S_n = n$ *e dunque* $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. *Se* $|z| > 1$, *si ha* $|z|^n \to \infty$ *e pertanto la successione* S_n *non converge.*

Serie di potenze a termini complessi. Per serie di potenze a termini complessi, centrate in z_0, si intende una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

dove $z_0, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sono numeri complessi noti. I numeri $\{a_n\}$ rappresentano i coefficienti della serie. La serie ovviamente converge ad a_0 per $z = z_0$. Per motivi di continuità c'è da aspettarsi che la serie converga anche per z sufficientemente vicino a z_0, come evidenziato dal seguente teorema.

Teorema 1.9 *Se la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *converge per* $z_1 \neq z_0$*, allora essa converge assolutamente per ogni* z *che dista da* z_0 *meno di* z_1*, ossia per ogni* z *tale che* $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$ *(Figura 1.3).*

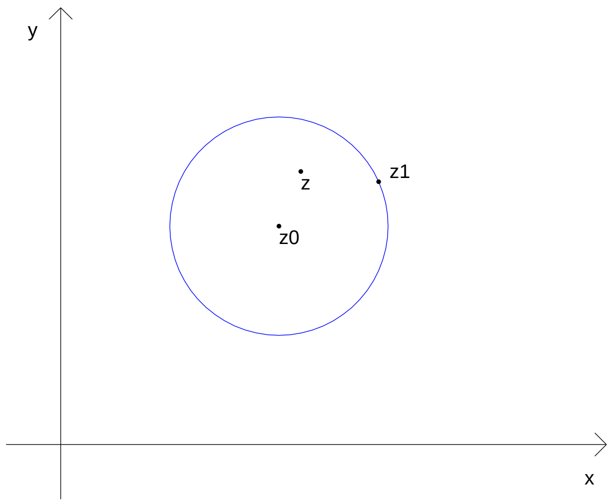


Figura 1.3:

Dimostrazione. Poiché $z_1 \neq z_0$ e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ è convergente, per n sufficientemente grande, diciamo $n > N$, $|a_n(z_1-z_0)^n| < 1$. Di conseguenza, per $n > N$,

$$\begin{aligned} |a_n(z-z_0)|^n &= |a_n(z-z_0)^n| \frac{|z_1-z_0|^n}{|z_1-z_0|^n} \\ &= \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n |a_n(z_1-z_0)^n| < \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n . \end{aligned}$$

Pertanto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n$ converge in quanto

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n < \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

essendo $r = \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right| < 1$. Di conseguenza converge assolutamente anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. □

Il precedente teorema suggerisce l'idea del raggio di convergenza, ossia dell'esistenza di un numero positivo R tale che la serie è convergente per ogni z con $|z-z_0| < R$ e divergente per $|z-z_0| > R$. Da notare che per $|z-z_0| = R$ la serie può essere convergente oppure divergente. Se $R = \infty$ la serie è convergente nell'intero piano e se $R = 0$ lo è soltanto in z_0. Per la valutazione di R i criteri più usati sono i seguenti:

Criterio del rapporto:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Criterio della radice:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Esercizio 1.10 *Determinare il raggio di convergenza della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} 2^n (z-1+2\mathrm{i})^n.$$

Si tratta di una serie di potenze centrata in $1-2\mathrm{i}$. *Per il criterio del rapporto*

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{2^n}{n+1}\frac{n+2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{n+2}{n+1} \to \frac{1}{2},$$

per $n \to \infty$. *Di conseguenza la serie è assolutamente convergente in tutti i punti del cerchio di centro* $1-2\mathrm{i}$ *e raggio* $1/2$, *ossia per tutti i valori* z *con* $|z-1+2\mathrm{i}| < \frac{1}{2}$.

Il precedente criterio del rapporto è una diretta conseguenza dell'analogo criterio per le serie numeriche. Infatti la serie di potenze può essere pensata nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ con $z_n = a_n(z-z_0)^n$. L'applicazione del criterio del rapporto per la sua assoluta convergenza richiede che

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \frac{|a_{n+1}||z-z_0|}{|a_n|} < 1$$

ossia che

$$|z-z_0| < \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Proprietà: Supponiamo che una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ abbia raggio di convergenza R. Questo comporta che per ogni numero z con $|z-z_0| < R$ resta definita una funzione

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Si può facilmente dimostrare che tale funzione è differenziabile e che

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

ossia che la sua derivata è ottenibile derivando la serie termine a termine. Va altresì notato che le due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$, la seconda delle quali è ottenuta dalla prima per derivazione termine a termine, hanno lo stesso raggio di convergenza. L'iterazione della suddetta proprietà implica che

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}$$

e che la nuova serie ha anch'essa raggio di convergenza R. Dall'ultima relazione deriva infine che

$$f^{(k)}(z_0) = k(k-1)\cdots 2\cdot 1\cdot a_k$$

ossia che

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

(ricordare che $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$ e $0! = 1$). I coefficienti $\{a_k\}$, per la loro evidente coincidenza con quelli dello sviluppo di Taylor di una funzione, sono definiti coefficienti di Taylor della f e la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

è definita serie di Taylor della f, con centro in z_0.

Esercizio 1.11 *Trovare il raggio di convergenza della serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}(z+3\mathrm{i})^n.$$

Il raggio di convergenza è dato da

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^n}\frac{2^{n+1}}{n+2} = 2.$$

Il dominio di convergenza è dunque costituito dal cerchio di centro $-3\mathrm{i}$ *e raggio 2* ($|z+3\mathrm{i}| < 2$).

Esercizio 1.12 *Stabilire se la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2\mathrm{i})^n$$

può convergere in $z = 0$ *e non in* $z = \mathrm{i}$. *Questo fatto non può verificarsi perché la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\mathrm{i})^n$ *è assolutamente convergente nel caso lo sia* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-2\mathrm{i})^n$. *A questo scopo basta osservare che*

$$|a_n(-1)^n| = |a_n| < |a_n(-2\mathrm{i})^n| < |a_n|2^n.$$

1.2 Funzioni complesse, limiti e continuità

Per funzione complessa si intende una funzione f che, ad ogni numero complesso di un insieme S assegna un numero complesso. In simboli $f : S \to \mathbb{C}$. S è dominio di f e $f(S)$ il suo codominio. Nel caso in cui il dominio di f non sia esplicitamente indicato, lo si definisce come il più ampio insieme di $\mathbb{C}$ nel quale essa è definita.

Per esempio $f(z) = z^n$, con n intero positivo, è definita su tutto $\mathbb{C}$; $f(z) = z^{-n}$, con n intero positivo, è definita per ogni z complesso $\neq 0$ e $f(z) = \dfrac{z^2+3z+2}{z^2+1}$ è definita per ogni $z \neq \pm\mathrm{i}$.

La definizione di limite per una funzione complessa è del tutto analoga a quella introdotta per le funzioni reali, con l'avvertenza che la distanza tra numeri complessi nel piano sostituisce quella di distanza tra numeri reali sulla retta.

Limite. Se $f : S \to \mathbb{C}$ è una funzione complessa e z_0 un punto di accumulazione di S, diciamo che

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = l$$

se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $\delta(\epsilon)$ tale che $|f(z) - l| < \epsilon$ per ogni $z \in S$ con $|z - z_0| < \delta(\epsilon)$. In altre parole l è il limite di $f(z)$ per $z \to z_0$ se la distanza tra $f(z)$ e l può essere resa arbitrariamente piccola prendendo z sufficientemente vicino a z_0.

Proprietà immediate: Se $\lim_{z\to z_0} f(z) = l$ e $\lim_{z\to z_0} g(z) = k$, allora:

- $\lim_{z\to z_0} [f(z) \pm g(z)] = l \pm k$
- $\lim_{z\to z_0} \alpha f(z) = \alpha l$ per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$
- $\lim_{z\to z_0} f(z) \cdot g(z) = lk$
- $\lim_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{l}{k}$ se $k \neq 0$

Continuità. Una funzione $f : S \to \mathbb{C}$ è continua in z_0 se

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Essa è continua in S se lo è in ogni punto di S.

Ogni polinomio $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ è continuo per qualunque $z \in \mathbb{C}$ e ogni funzione razionale (quoziente di due polinomi) è continua tranne negli zeri del denominatore.

Come nel campo reale, le combinazioni lineari di funzioni continue e i prodotti di funzioni continue generano funzioni continue. Il rapporto di funzioni continue è una funzione continua, tranne nei punti in cui si azzera il denominatore. Una serie di potenze, centrata in z_0 ed avente R come raggio di convergenza, rappresenta una funzione continua nel cerchio con centro z_0 e raggio R. Se f è una funzione continua in S e $\{z_n\}$ è una qualsiasi successione di numeri complessi convergente a z_0, $f(z_n) \to f(z_0)$ per $n \to \infty$.

Funzione limitata. Una funzione $f : S \to \mathbb{C}$ è limitata in un dominio $\Omega \subset S$ se esiste un numero L tale che $|f(z)| \leq L$ per ogni $z \in \Omega$.

Teorema 1.10 (Weierstrass) *Ogni funzione continua in un compatto Ω è limitata. Di conseguenza essa assume massimo e minimo, ossia esistono due numeri z_1 e z_2 tali che, qualunque sia $z \in \Omega$,*

$$|f(z_1)| \leq |f(z)| \leq |f(z_2)|.$$

Differenziabilità (Condizioni di Cauchy-Riemann). Una funzione f è detta differenziabile in z_0 se esiste finito il

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Se questo avviene, il valore del limite viene indicato con $f'(z_0)$ e rappresenta la derivata della f in z_0.

È del tutto equivalente dire che la f è differenziabile in z_0 e che $f'(z_0)$ è il valore della sua derivata se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$

Spesso $f'(z_0)$ viene definito come

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

La differenza sostanziale rispetto a quanto avviene nel campo reale, dove la variabile x può tendere a x_0 unicamente sulla retta, è che ora z può tendere a z_0 secondo una qualsiasi curva del piano.

Vediamo alcuni esempi:

1. $f(z) = z^2$ è differenziabile in $1 + \mathrm{i}$ e $f'(1 + \mathrm{i}) = 2(1 + \mathrm{i})$; infatti

$$\lim_{h \to 0} \frac{[(1 + \mathrm{i}) + h]^2 - (1 + \mathrm{i})^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(1 + \mathrm{i})h + h^2}{h} = 2(1 + \mathrm{i}).$$

2. $f(z) = \bar{z}$ non è differenziabile in $z = \mathrm{i}$, in quanto il limite dipende dalla traiettoria con cui $z \to \mathrm{i}$; infatti se la $z \to \mathrm{i}$ lungo l'asse immaginario (Figura 1.4) ossia assumendo i valori $\alpha\mathrm{i}$ con $\alpha \to 1$, risulta

$$\frac{f(z) - f(\mathrm{i})}{z - \mathrm{i}} = \frac{f(\alpha\mathrm{i}) - f(\mathrm{i})}{\alpha\mathrm{i} - \mathrm{i}} = \frac{-\alpha\mathrm{i} - (-\mathrm{i})}{(\alpha - 1)\mathrm{i}} = \frac{(1 - \alpha)\mathrm{i}}{(\alpha - 1)\mathrm{i}} = -1.$$

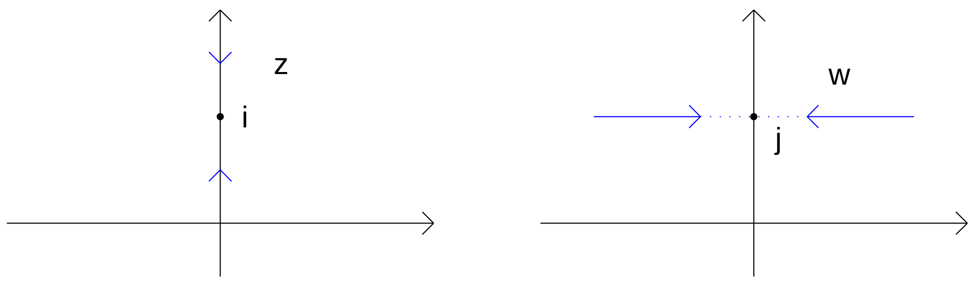


Figura 1.4:

Se $z \to \mathrm{i}$ orizzontalmente, ossia assumendo valori del tipo $z = \alpha + \mathrm{i}$ con $\alpha \to 0$, il rapporto incrementale diventa

$$\frac{f(z) - f(\mathrm{i})}{z - \mathrm{i}} = \frac{\alpha - \mathrm{i} - (-\mathrm{i})}{\alpha + \mathrm{i} - \mathrm{i}} = 1.$$

Il limite dunque non esiste perché procedendo lungo l'asse delle ordinate si ottiene -1 e parallelamente all'asse delle ascisse si ottiene 1.

3. $f(z) = |z|^2$ è differenziabile in $z = 0$ e $f'(0) = 0$, ma non lo è in qualsiasi punto $z \neq 0$.

   Per dimostrare che $f'(0) = 0$, basta osservare che

   $$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z} = 0$$

   in quanto $|z|^2/z = z\bar{z}/z = \bar{z}$.

   Per dimostrare che la f non è differenziabile in $z_0 \neq 0$, posto $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ e $z = x + \mathrm{i}y$ facciamo tendere $z \to z_0$ secondo le due traiettorie $z = x_0 + \mathrm{i}y$, $y \to y_0$, e $z = x + \mathrm{i}y_0$, con $x \to x_0$. La prima è dunque verticale e la seconda orizzontale.

   Lungo la prima traiettoria:

   $$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{|x_0 + \mathrm{i}y|^2 - |x_0 + \mathrm{i}y_0|^2}{\mathrm{i}(y - y_0)} = \frac{(y - y_0)(y + y_0)}{\mathrm{i}(y - y_0)} = -\mathrm{i}(y + y_0)$$

   che converge a $-2\mathrm{i}y_0$ per $y \to y_0$.

   Lungo la seconda traiettoria

   $$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{|x + \mathrm{i}y_0|^2 - |x_0 + \mathrm{i}y_0|^2}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = (x + x_0)$$

   che converge a $2x_0$ per $x \to x_0$.

   Resta così dimostrata la non derivabilità di $|z|^2$ in qualunque punto $z \neq 0$.

Analiticità. Una funzione complessa f è analitica in z_0 se esiste un intorno di z_0, in ogni punto del quale la f è differenziabile.

Ad esempio la funzione z^2 è analitica per ogni valore di z (in breve è analitica nel piano); mentre $|z|^2$ non lo è mai in quanto è unicamente differenziabile in $z = 0$, punto nel quale non è analitica perché non esiste un aperto centrato in z_0 in ogni punto del quale sia differenziabile.

Condizioni di Cauchy-Riemann. Le condizioni di Cauchy-Riemann forniscono un criterio di importanza fondamentale per stabilire l'analiticità di una funzione complessa. Per la sua applicazione si devono preliminarmente identificare le parti reale e immaginaria della $f(z)$, ossia si deve esprimere $f(z)$ nella forma $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$.

Alcuni esempi:

1. Se $f(z) = z^2$, essendo $f(z) = (x + \mathrm{i}y)^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$, $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 2xy$;

2. se $f(z) = |z|$, $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $v(x, y) = 0$;

3. se $f(z) = z + 2\bar{z}$, $u(x, y) = 3x$ e $v(x, y) = -y$.

Teorema 1.11 (Equazioni di Cauchy-Riemann) *Sia f continua in un cerchio $|z - z_0| < r$ con centro $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ e raggio r. Supponiamo inoltre che f sia differenziabile in z_0. Sotto tali ipotesi valgono le seguenti equazioni per le funzioni u e v:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases} .$$

In altri termini, le equazioni di Cauchy-Riemann danno delle condizioni necessarie per la differenziabilità di una funzione continua in un punto.

Dimostrazione. Poiché la $f(z)$ è differenziabile in z_0, esiste in $\mathbb{C}$ il numero

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Posto $\Delta z = \Delta x + \mathrm{i}\Delta y$, il rapporto incrementale può essere scritto nel modo seguente

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \\
&= \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + \mathrm{i}v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)] - [u(x_0, y_0) + \mathrm{i}v(x_0, y_0)]}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y} \\
&= \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y} + \mathrm{i}\frac{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y}.
\end{aligned}$$

Poiché $f'(z_0)$ esiste, il rapporto incrementale deve convergere allo stesso valore indipendentemente dalla traiettoria lungo la quale $\Delta z \to 0$, dunque per $\Delta x \to 0$ e $\Delta y = 0$, come per $\Delta x = 0$ e $\Delta y \to 0$.

1° **caso**

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + \mathrm{i}\frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right] \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

2° **caso**

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\mathrm{i}\Delta y} + \mathrm{i}\frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\mathrm{i}\Delta y} \right] \\
&= -\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad (1/\mathrm{i} = -\mathrm{i})
\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Da cui, eguagliando le parti reali e immaginarie, seguono le equazioni di Cauchy-Riemann. □

Esercizio 1.13 *Verificare, nei tre esempi indicati precedentemente, se sono verificate le condizioni di Cauchy-Riemann.*

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y$ *(sono soddisfatte)*
2. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ *(non soddisfatte)*
3. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -2$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ *(non soddisfatte)*

Teorema 1.12 (Condizione sufficiente per la differenziabilità) *Se u e v sono funzioni continue in (x_0, y_0) con le derivate parziali, anch'esse continue e soddisfacenti le equazioni di Cauchy-Riemann, la funzione complessa $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ è ivi differenziabile.*

Dominio. Un insieme D è definito un dominio se:

a. ad ogni punto di D si può associare un cerchio aperto contenuto in D;

b. ogni coppia di punti di D può essere congiunta con una curva regolare a tratti [2], interamente contenuta in D.

Una funzione è analitica in un dominio D, se lo è in tutti punti di D.
Alcuni esempi:

1. La funzione $f(z) = z^3$ è analitica in tutti i punti del piano; infatti $f(z) = (x + \mathrm{i}y)^3 = (x^3 - 3xy^2) + \mathrm{i}(3x^2y - y^3)$ implica che, qualunque sia $z = x + \mathrm{i}y$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 3(x^2 - y^2)$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -6xy$ ossia che valgono le condizioni di Cauchy-Riemann e che, inoltre, le derivate parziali sono ovunque continue.

2. La funzione $f(z) = |z| + \mathrm{i}z$ non è analitica, infatti $f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} - y + \mathrm{i}x$ implica che le funzioni $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - y$ e $v(x, y) = x$ non soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann.

Regole di differenziazione. Se f e g sono funzioni differenziabili in z_0, per esse valgono regole di derivazione del tutto analoghe a quelle valide nel campo reale. In particolare:

1. $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$
2. $(\alpha f)'(z_0) = \alpha f'(z_0)$, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$
3. $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z_0) = \dfrac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g'(z_0))^2}$, se $g'(z_0) \neq 0$

1.3 Funzioni notevoli

Funzione esponenziale. Le serie di potenze consentono di estendere al campo complesso la funzione esponenziale. Ricordiamo che nel campo reale, per un valore di x, vale il seguente sviluppo in serie di potenze:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Nel campo complesso la funzione esponenziale viene definita per estensione analitica, ossia definendo e^z, con $z = x + \mathrm{i}y$, nel modo seguente:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

[2]Una curva è regolare se è dotata di tangente in tutti i suoi punti interni; è regolare a tratti se non lo è unicamente in un numero finito di punti.

Il criterio del rapporto consente di verificare immediatamente che la serie è assolutamente convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$ in quanto, essendo

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \infty,$$

il raggio di convergenza è $R = \infty$.
È immediato osservare che la funzione esponenziale è infinitamente derivabile e che

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z$$

esattamente come campo reale.

Proprietà della funzione esponenziale:

1. $e^0 = 1$ (per definizione)
2. se $g(z)$ è differenziabile, $e^{g(z)}$ è differenziabile e $\dfrac{d}{dz}e^{g(z)} = g'(z)e^{g(z)}$
3. $e^{z+w} = e^z e^w$, per ogni coppia di numeri complessi z e w
4. $e^z \neq 0$, per ogni $z \in \mathbb{C}$
5. $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$
6. $\dfrac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$
7. $|e^z| = e^x$, per ogni y, in quanto$|e^{\mathrm{i}y}| = 1$ qualunque sia $y \in \mathbb{R}$
8. $e^z = 1$ se e solo se $z = 2n\pi\mathrm{i}$, con n intero.

Funzioni sin z e cos z. Cominciamo con il ricordare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ valgono i seguenti sviluppi in serie:

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots
\end{aligned}$$

Da tali sviluppi deriva, come notato da Eulero, che le funzioni $\cos x$ e $\sin x$ posseggono globalmente tutti i termini dello sviluppo di e^x. Più precisamente Eulero ha osservato che, sostituendo

x con $\mathrm{i}x$ nello sviluppo di e^x, risulta

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!} = 1 + \mathrm{i}x + \frac{(\mathrm{i}x)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}x)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{i}x)^4}{4!} + \cdots \\ &= 1 + \mathrm{i}x - \frac{x^2}{2!} - \mathrm{i}\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathrm{i}\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + \mathrm{i}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos x + \mathrm{i}\sin x. \end{aligned}$$

Per ogni x reale vale dunque l'importante formula di Eulero

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$$

dalla quale discende immediatamente che

$$\cos x = \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2} \quad \text{e} \quad \sin x = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}.$$

Formula di Eulero nel campo complesso. Se $\cos z$ e $\sin z$ vengono estese al campo complesso mediante gli sviluppi in serie validi nel campo reale si perviene alle seguenti definizioni:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

È immediato osservare che sono ambedue derivabili e che

$$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z, \quad \frac{d}{dz}\sin z = \cos z.$$

Come nel campo reale $\sin z$ e $\cos z$ sono rispettivamente dispari e pari, ossia $\sin(-z) = -\sin z$ e $\cos(-z) = \cos z$, in quanto le potenze di z che compaiono negli sviluppi di $\sin z$ e $\cos z$ sono rispettivamente dispari e pari.

Come conseguenza dei precedenti sviluppi si ha che, anche nel campo complesso, vale la famosa relazione di Eulero

$$e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$$

dalla quale, ricordando che $\cos z$ è pari e $\sin z$ è dispari, segue che

$$\cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} \quad \text{e} \quad \sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$$

esattamente come campo reale. Da tali definizioni discende l'estensione di ben note proprietà trigonometriche al campo complesso, come le seguenti:

$$\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \cos z \sin w$$

$$\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w.$$

Proprietà:

1. $\sin z$ e $\cos z$ non sono limitate se $\mathrm{Im}(z) \neq 0$.

   Infatti per $z = \mathrm{i}y$ con $y \neq 0$, $\sin \mathrm{i}y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{-y} - e^{y})$ che, in modulo, tende a $+\infty$ per $y \to \pm\infty$. La stessa conclusione vale anche per $\cos \mathrm{i}y$.

2. $\cos \mathrm{i}y = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ e $\sin \mathrm{i}y = \mathrm{i} \sinh y = \mathrm{i}\frac{e^y - e^{-y}}{2}$ per ogni $y \in \mathbb{R}$.

   Basta infatti osservare che:

$$\cos \mathrm{i}y = \frac{e^{\mathrm{i}(\mathrm{i}y)} + e^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}y)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \cosh y \text{ (per definizione)}$$
$$\sin \mathrm{i}y = \frac{e^{\mathrm{i}(\mathrm{i}y)} - e^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}y)}}{2\mathrm{i}} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{i}\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = \mathrm{i}\sinh y \text{ (per definizione)}$$

3. $\sin z = \sin(x + \mathrm{i}y) = \sin x \cosh y + \mathrm{i} \cos x \sinh y$
   $\cos z = \cos(x + \mathrm{i}y) = \cos x \cosh y - \mathrm{i} \sin x \sinh y$

   Dalla definizione delle funzioni $\sin z$ e $\cos z$, posto $z = x + \mathrm{i}y$, deriva che

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \frac{e^{\mathrm{i}x - y} - e^{-\mathrm{i}x + y}}{2\mathrm{i}} \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}[e^{-y}(\cos x + \mathrm{i}\sin x) - e^{y}(\cos x - \mathrm{i}\sin x)] \quad \text{(formula di Eulero)} \\ &= -\mathrm{i}(\cos x)\frac{e^{-y} - e^{y}}{2} + (\sin x)\frac{e^{-y} + e^{y}}{2} \\ &= \sin x \cosh y + \mathrm{i}\cos x \sinh y.\end{aligned}$$

   Analogamente

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} = \frac{e^{\mathrm{i}x - y} + e^{-\mathrm{i}x + y}}{2} \\ &= \frac{1}{2}[e^{-y}(\cos x + \mathrm{i}\sin x) + e^{y}(\cos x - \mathrm{i}\sin x)] \\ &= (\cos x)\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} - \mathrm{i}(\sin x)\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \\ &= \cos x \cosh y - \mathrm{i}\sin x \sinh y.\end{aligned}$$

4. $\sin z$ e $\cos z$ sono periodiche di periodo 2π, ossia $\sin(z + 2n\pi) = \sin z$ e $\cos(z + 2n\pi) = \cos z$, per ogni intero n.

   È sufficiente osservare che, per la 3. e tenuto conto della periodicità nel campo reale:

$$\begin{aligned}\sin(z + 2n\pi) &= \sin[(x + 2n\pi) + \mathrm{i}y] \\ &= \sin(x + 2n\pi)\cosh y + \mathrm{i}\cos(x + 2n\pi)\sinh y \\ &= \sin x \cosh y + \mathrm{i}\cos x \sinh y = \sin(x + \mathrm{i}y) = \sin z.\end{aligned}$$

   Analogamente

$$\begin{aligned}\cos(z + 2n\pi) &= \cos[(x + 2n\pi) + \mathrm{i}y] \\ &= \cos(x + 2n\pi)\cosh y - \mathrm{i}\sin(x + 2n\pi)\sinh y \\ &= \cos x \cosh y - \mathrm{i}\sin x \sinh y = \cos(x + \mathrm{i}y) = \cos z.\end{aligned}$$

5. $\sin z = 0$ se e solo se $z = n\pi$, con n intero.

   Per la 3. $\sin z = \sin x \cosh y + \mathrm{i} \cos x \sinh y = 0$ se e solo se $\sin x \cosh y = 0$ e $\cos x \sinh y = 0$. Poiché nel campo reale $\cosh y \neq 0$, deve essere $\sin x = 0$, ossia $x = n\pi$, con n intero. In tal caso $\cos x = \cos n\pi = (-1)^n$, per cui deve essere $\sinh y = 0$, ossia $y = 0$ e dunque $z = n\pi$.

6. $\cos z = 0$ se e solo se $z = (2n-1)\frac{\pi}{2}$, con n intero, ossia se e solo se z è un multiplo dispari di $\frac{\pi}{2}$.

   La dimostrazione è del tutto analoga al caso precedente.

Esercizio 1.14 *Dimostrare la validità delle seguenti proprietà:*

1. e^z *è analitica nell'intero piano e* $\frac{d}{dz}e^z = e^z$*;*
2. $e^z e^w = e^{z+w}$*;*
3. $e^z \neq 0$*, qualunque sia* z*;*
4. $e^{-z} = 1/e^z$*, qualunque sia* z*;*
5. $e^z/e^w = e^{z-w}$*, qualunque siano* z *e* w*;*
6. $|e^{\mathrm{i}x}| = 1$*, per ogni* $x \in \mathbb{R}$*;*
7. $e^z = 1$ *se e solo se* $z = 2n\pi\mathrm{i}$ *con* n *intero;*
8. $e^z = e^w$ *se e solo se* $z = w + 2n\pi\mathrm{i}$ *con* n *intero.*

Dimostrazione.

1. $e^z = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ *con* $u(x,y) = e^x \cos y$ *e* $v(x,y) = e^x \sin y$*. Pertanto* u *e* v *sono ovunque continue e derivabili con continuità.*

   Valgono inoltre le condizioni di Cauchy-Riemann, in quanto $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$ *e* $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y$*.*

   Di conseguenza e^z *è analitica e* $\frac{d}{dz}e^z = \frac{\partial}{\partial x}[u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)] = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = e^z$*.*

2. $$\begin{aligned} e^z e^w &= e^{x+\mathrm{i}y} e^{a+\mathrm{i}b} = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) e^a (\cos b + \mathrm{i}\sin b) \\ &= e^{x+a}[(\cos y \cos b - \sin y \sin b) + \mathrm{i}(\sin y \cos b + \cos y \sin b)] \\ &= e^{x+a}[\cos(y+b) + \mathrm{i}\sin(y+b)] = e^{x+a} e^{\mathrm{i}(y+b)} = e^{(x+\mathrm{i}y)+(a+\mathrm{i}b)} = e^{z+w} \end{aligned}$$

3. $e^z = e^{x+\mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = 0$*, se e solo se* $\cos y = 0$ *e* $\sin y = 0$*, il che è impossibile se* x *e* y *sono numeri reali.*

4. $e^{-z} = 1/e^z$*, in quanto* $e^z e^{-z} = e^0 = 1$*.*

5. $e^z/e^w = e^z e^{-w} = e^{z-w}$*.*

6. $e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$*, e dunque* $|e^{\mathrm{i}x}| = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$*, per ogni* $x \in \mathbb{R}$*.*

7. $e^z = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = 1$ *se e solo se* $|e^z| = |e^x| = 1$*, dunque* $x = 0$*, e* $\cos y = 1$ *e* $\sin y = 0$*, ossia se e solo se* $x = 0$ *e* $y = 2n\pi\mathrm{i}$*.*

8. *$e^z = e^w$ implica che $e^{z-w} = 1$ e dunque che $z - w = 2n\pi\mathrm{i}$ con n intero.*

$\square$

Esercizio 1.15 *Mostrare che ogni radice n-esima dell'unità è esprimibile nella forma $e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$, con $k = 0, 1, \ldots, n-1$.*

Basta ricordare che $\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}$ e utilizzare la formula di Eulero.

Altre definizioni.

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}, \quad \cot z = \frac{1}{\tan z},$$

ovviamente nell'ipotesi che il denominatore sia diverso da 0.

Altre proprietà:

1. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
2. $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$
3. $\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \cos z \sin w$
4. $\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$
5. $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$
6. $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$
7. $\sin(z + 2n\pi) = \sin z$ e $\cos(z + 2n\pi) = \cos z$,per qualsiasi intero n.

Esercizio 1.16 *Dimostrare che $\cosh z$ e $\sinh z$ sono analitiche.*

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \frac{1}{2}[e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) + e^{-x}(\cos y - \mathrm{i}\sin y)] = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$$

essendo

$$u(x,y) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\cos y = \cosh x \cos y$$
$$v(x,y) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\sin y = \sinh x \sin y$$

u e v sono continue e inoltre le derivate parziali soddisfano con continuità le condizioni di Cauchy-Riemann, in quanto

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sinh x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\cosh x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\cosh z$ è dunque ovunque analitica. In modo del tutto analogo si dimostra l'analiticità, per tutti i numeri complessi, di $\sinh z$.

Esercizio 1.17 *Dimostrare che e^{z^2} è analitica nell'intero piano complesso.*

Si tratta di esprimere e^{z^2} nella forma $u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, verificare che valgono le condizioni di Cauchy-Riemann e che le derivate parziali di u e v sono funzioni continue.

$$e^{z^2} = e^{(x+\mathrm{i}y)^2} = e^{(x^2-y^2)+2\mathrm{i}xy} = e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + \mathrm{i}\sin 2xy) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$$

essendo $u(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos 2xy$ e $v(x,y) = e^{x^2-y^2}\sin 2xy$. Pertanto

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{x^2-y^2}(x\cos 2xy - y\sin 2xy) = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{x^2-y^2}(y\cos 2xy + x\sin 2xy) = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ossia sono soddisfatte le condizioni di Cauchy-Riemann, qualunque siano x e y. La e^{z^2} è dunque ovunque analitica, dato che le derivate sono tutte ovunque continue.

Esercizio 1.18 *Dimostrare che la funzione $e^{\frac{1}{z}}$ soddisfa con continuità le condizioni di Cauchy-Riemann per ogni $z \neq 0$.*

$$\begin{aligned}
e^{\frac{1}{z}} &= e^{\frac{1}{x+\mathrm{i}y}} = e^{\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}} \\
&= e^{\frac{x}{x^2+y^2}}(\cos\frac{y}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\sin\frac{y}{x^2+y^2}) \\
&= u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)
\end{aligned}$$

con $u(x,y) = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\frac{y}{x^2+y^2}$ e $v(x,y) = -e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\sin\frac{y}{x^2+y^2}$. Inoltre

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= e^{\frac{x}{x^2+y^2}}(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\sin\frac{y}{x^2+y^2}) \\
&= e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\frac{1}{(x^2+y^2)^2}[(y^2-x^2)\cos\frac{y}{x^2+y^2} + 2xy\sin\frac{y}{x^2+y^2}] = \frac{\partial v}{\partial y} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\frac{1}{(x^2+y^2)^2}[2xy\cos\frac{y}{x^2+y^2} + (x^2-y^2)\sin\frac{y}{x^2+y^2}] = -\frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}$$

per cui la funzione è analitica tranne in $z = 0$.

La funzione logaritmo nel piano complesso. La relazione base nella definizione del logaritmo nel campo reale è la seguente:

$$y = \ln x \qquad \text{se e solo se} \qquad x = e^y.$$

Questa relazione può essere utilizzata per estendere la definizione nel campo complesso ove, per evidenziare che l'argomento del logaritmo è complesso, è preferibile scrivere $\log z$ in luogo di $\ln z$.

Si dice dunque che

$$w = \log z \qquad \text{se e solo se} \qquad z = e^w,$$

relazione che permette di ottenere una formula risolutiva per il calcolo di $\log z$. A tale scopo, posto $z = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$ (forma polare di z), si considera l'equazione $z = \rho e^{\mathrm{i}\theta} = e^w = e^{u+\mathrm{i}v} = e^u e^{\mathrm{i}v}$ nelle incognite u e v.

Da essa deriva che $|z| = \rho = e^u$, ossia che $u = \ln\rho$, con $\rho > 0$.

Per il calcolo di v si osserva che deve risultare $e^{\mathrm{i}v} = e^{\mathrm{i}\theta}$, ossia $v = \theta + 2n\pi$, con n intero. Di conseguenza, ricordando che $\rho = |z|$ e $\theta = \arg z$,

$$w = \log z = \ln |z| + \mathrm{i}(\arg z + 2n\pi),\ n \text{ intero.}$$

Poiché $\arg(z)$ contiene implicitamente tutti i numeri del tipo $\theta+2n\pi$, spesso, per semplicità, si scrive

$$\log z = \ln |z| + \mathrm{i} \arg(z).$$

Alcuni esempi:

- $$\log(\mathrm{i}) = \ln |\mathrm{i}| + \mathrm{i} \arg(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

- $$\log(-2) = \ln |2| + \mathrm{i} \arg(-2) = \ln 2 + (2n + 1)\pi\mathrm{i}$$

- $$\log(1 - \mathrm{i}) = \ln |\sqrt{2}| + \mathrm{i}\left(\frac{7}{4}\pi + 2n\pi\right)$$

Logaritmo principale. Poiché $\log z$ assume infiniti valori, essa non è propriamente una funzione. La si può comunque considerare tale assumendo come definizione la sua parte principale, cioè la funzione

$$\log z = \ln |z| + \mathrm{i} \arg(z), \quad \text{con } 0 \leq \arg(z) < 2\pi.$$

Negli esempi precedenti si porrà dunque

- $$\log(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$$

- $$\log(-2) = \ln 2 + \pi\mathrm{i}$$

- $$\log(1 - \mathrm{i}) = \ln \sqrt{2} + \frac{7}{4}\pi\mathrm{i}$$

Avvertenza. In molti settori per definire il logaritmo principale si pone la limitazione $-\pi < \arg(z) \leq \pi$, in luogo di $0 \leq \arg(z) < 2\pi$.

Proprietà: Indicati con z e w due qualsiasi numeri complessi:

1. $e^{\log z} = z$ e $\log e^z = z + 2n\pi\mathrm{i}$, n intero;
2. $\log(zw) = \log z + \log w$;
3. $\log(z/w) = \log z - \log w$;
4. qualunque sia il numero razionale r, $\log(z^r) = r \log z$;

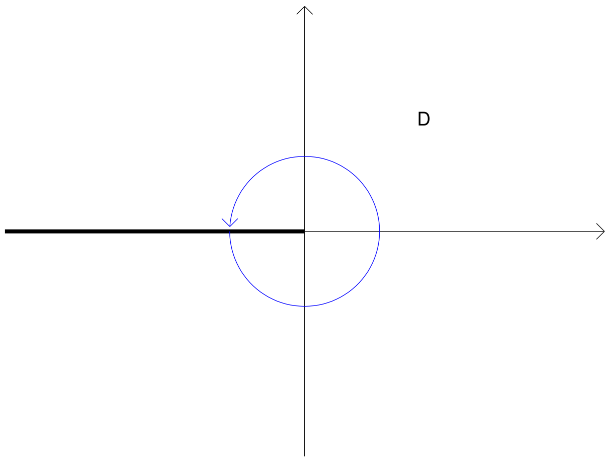


Figura 1.5:

5. indicato con $\mathcal{D}$ il piano complesso privato del semiasse reale non positivo (Figura 1.5), privo cioè dei punti del tipo $x \leq 0$ e $y = 0$, il $\log z$ è analitico in $\mathcal{D}$ e $\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z}$.

Dimostrazione.

1. $e^{\log z} = e^{\ln|z| + \mathrm{i}\arg(z)} = e^{\ln|z|}e^{\mathrm{i}\arg(z)} = |z|e^{\mathrm{i}\arg(z)}$, forma polare di z.
2. $\log(zw) = \ln|zw| + \mathrm{i}\arg(zw) = \ln|z||w| + \mathrm{i}\arg(zw) = \ln|z| + \ln|w| + \mathrm{i}[\arg z + \arg w)] = \log z + \log w$.
3. $\log(z/w) = \ln|z/w| + \mathrm{i}\arg(z/w) = \ln|z| - \ln|w| + \mathrm{i}[\arg z - \arg w)] = \log z - \log w$.
4. Notiamo dapprima che $|z^r| = |z|^r$ e $\arg(z^r) = r\arg(z)$.

   Pertanto
$$\begin{aligned} \log(z^r) &= \ln|z^r| + \mathrm{i}\arg(z^r) = r\ln|z| + \mathrm{i}r\arg(z) \\ &= r[\ln|z| + \mathrm{i}\arg(z)] = r\log z. \end{aligned}$$
5. Sia $w = \log z$, con $z \in \mathcal{D}$. Allora $z = e^w$ e per la derivazione composta $\frac{dz}{dz} = 1 = e^w\frac{dw}{dz}$, da cui, essendo $\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dz}\log z$,
$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\log z &= e^{-w} = e^{-\log z} = e^{-\ln|z| - \mathrm{i}\arg(z)} \\ &= e^{\ln\frac{1}{|z|} + \mathrm{i}\arg(\frac{1}{z})} = \frac{1}{|z|}e^{\mathrm{i}\arg(\frac{1}{z})} = \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

□

Esercizio 1.19 *Calcolare il logaritmo principale di* $(2+2\mathrm{i})^{35}$.
Essendo $2 + 2\mathrm{i} = 2(1+\mathrm{i}) = 2\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ *(forma polare), si ha*
$$\log[(2+2\mathrm{i})^{35}] = 35\left(\ln 2\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right).$$

Esercizio 1.20 *Verificare che* $\log\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \log(1-\mathrm{i}) - \log(1+\mathrm{i})$.
Essendo $\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{-2\mathrm{i}}{2} = -\mathrm{i}$, *si ottiene*

$$\log\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \ln|-\mathrm{i}| + \mathrm{i}\arg(-\mathrm{i}) = \frac{3}{2}\pi\mathrm{i},$$

e da $\log(1-\mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\arg(1-\mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + \frac{7}{4}\pi\mathrm{i}$, *e* $\log(1+\mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{4}$,

$$\log(1-\mathrm{i}) - \log(1+\mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + \frac{7}{4}\pi\mathrm{i} - \ln\sqrt{2} - \mathrm{i}\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi\mathrm{i} = \log\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}.$$

Potenze della forma z^w. Consideriamo ora le funzioni del tipo z^w, dove w è un qualsiasi numero complesso e z è un generico numero complesso diverso da 0.

Ricordiamo preliminarmente che $z^0 = 1$ e che $z^n = \overbrace{z\cdots z}^{n \text{ volte}}$, prodotto di n fattori uguali a z nel caso n sia un intero positivo. Se z è un intero negativo

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}}.$$

Ad esempio:

$$(1+\mathrm{i})^{-4} = \frac{1}{(1+\mathrm{i})^4} = \frac{1}{(\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^4} = \frac{1}{4e^{\mathrm{i}\pi}} = -\frac{1}{4}.$$

Nel caso in cui $w = \frac{1}{n}$, n intero positivo, $z^{\frac{1}{n}}$ può essere facilmente calcolato facendo ricorso alle radici n-esime dell'unità. Se $z = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$ (forma polare)

$$z^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Se w del tipo $\frac{1}{n}$ con n intero negativo

$$z^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{z^{-\frac{1}{n}}}.$$

Pertanto se w è un numero razionale del tipo $w = \frac{m}{n}$, con m, n interi,

$$z^w = (z^{\frac{1}{n}})^m = (z^m)^{\frac{1}{n}}.$$

Esempio. Calcolare $z^w = (2-2\mathrm{i})^{\frac{3}{5}}$.

$$\begin{aligned}
(2-2\mathrm{i})^3 &= 8(1-\mathrm{i})^3 = -16(1+\mathrm{i}) = 16\sqrt{2}e^{(\frac{\pi}{4}+2k\pi)\mathrm{i}} \\
(2-2\mathrm{i})^{\frac{3}{5}} &= (16\sqrt{2})^{\frac{1}{5}} e^{(\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5})\mathrm{i}} \\
&= (16\sqrt{2})^{\frac{1}{5}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right)\right],\ k = 0, 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}$$

Siamo ora in grado, utilizzando le funzioni esponenziale e logaritmo nel campo complesso, di definire z^w per ogni numero complesso $z \neq 0$ e ogni numero complesso w. A tale scopo ricordiamo che, se x è un numero reale positivo e y un qualsiasi numero reale,

$$x^y = e^{y\ln x}.$$

Usando tale relazione come modello, z^w viene definita mediante l'equazione

$$z^w = e^{w \log z}, \quad z \neq 0.$$

Poiché $\log z$ ha infiniti valori, lo stesso vale evidentemente per z^w.

Ad esempio.

$$\begin{aligned} 2^{\mathrm{i}} &= e^{\mathrm{i} \log 2} = e^{\mathrm{i}(\ln 2 + \mathrm{i} \arg 2)} \\ &= e^{\mathrm{i}(\ln 2 + 2n\pi \mathrm{i})} = e^{-2n\pi + \mathrm{i} \ln 2} \\ &= e^{-2n\pi}[\cos(\ln 2) + \mathrm{i} \sin(\ln 2)] \end{aligned}$$

per ogni intero n.

Altro esempio:

$$\begin{aligned} (1-\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}} &= e^{(1+\mathrm{i}) \log(1-\mathrm{i})} = e^{(1+\mathrm{i})[\ln|1-\mathrm{i}| + \mathrm{i} \arg(1-\mathrm{i})]} \\ &= e^{(1+\mathrm{i})[\ln \sqrt{2} + \mathrm{i}(\frac{7}{4}\pi + 2n\pi)]} \\ &= e^{\ln \sqrt{2} - (\frac{7}{4}\pi + 2n\pi) + \mathrm{i}(\ln \sqrt{2} + \frac{7}{4}\pi + 2n\pi)} \\ &= e^{\ln \sqrt{2} - (\frac{7}{4}\pi + 2n\pi)} \left[\cos\left(\ln \sqrt{2} + \frac{7}{4}\pi \right) + \mathrm{i} \sin\left(\ln \sqrt{2} + \frac{7}{4}\pi \right) \right] \end{aligned}$$

per ogni intero n.

Poiché n può assumere un qualsiasi valore intero, ciascuna delle due potenze assume infiniti valori.

Proprietà: Qualunque sia il numero complesso $z \neq 0$ e qualunque siano i numeri complessi α e β, valgono le seguenti proprietà:

1. $z^\alpha z^\beta = z^{\alpha+\beta}$;
2. $z^\alpha / z^\beta = z^{\alpha-\beta}$;
3. $(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta}$.

Derivata di z^w. Indicato con $\mathcal{D}$ l'insieme di tutti i punti del piano privato dell'origine e del seminasse reale negativo (Figura 1.5), si può dimostrare che la funzione z^w, qualunque siano $z \neq 0$ e w, è ivi analitica e

$$\frac{d}{dz} z^w = w P_r(z^{w-1}),$$

dove P_r indica il valore principale della potenza, ossia $e^{(w-1)P_r(\log z)}$, essendo $P_r(\log z) = \ln|z| + \mathrm{i} \arg(z)$.

Esercizio 1.21 *Determinare $P_r(2^{3-\mathrm{i}})$.*

$$\begin{aligned} 2^{3-\mathrm{i}} &= e^{(3-\mathrm{i}) \log 2} = e^{(3-\mathrm{i})[\ln 2 + \mathrm{i}(\arg 2 + 2n\pi)]} = e^{(3-\mathrm{i})(\ln 2 + \mathrm{i} 2n\pi)} \\ &= e^{3 \ln 2 + 2n\pi - \mathrm{i}(\ln 2 - 6n\pi)} = e^{3 \ln 2 + 2n\pi}[\cos(\ln 2) - \mathrm{i} \sin(\ln 2)] \\ &= 8e^{2n\pi}[\cos(\ln 2) - \mathrm{i} \sin(\ln 2)]. \\ P_r(2^{3-\mathrm{i}}) &= e^{3 \ln 2}[\cos(\ln 2) - \mathrm{i} \sin(\ln 2)] = 8[\cos(\ln 2) - \mathrm{i} \sin(\ln 2)]. \end{aligned}$$

1.4 Punti singolari

Le funzioni *analitiche* possono presentare dei punti di *singolarità*, ossia dei punti nei quali si verifica un comportamento *non ordinario*. Un punto z_0 è definito *ordinario* se esiste un suo intorno nel quale la funzione è analitica, ossia se esiste un $\delta > 0$ tale che la funzione è analitica per ogni z con $|z - z_0| < \delta$. Diversamente z_0 è definito *singolare*, ossia rappresenta un punto di singolarità per $f(z)$. I punti di singolarità possone essere di vario tipo.

Poli Un punto z_0 è un polo di ordine n se esiste un intero positivo n (necessariamente unico) tale che

$$\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^n f(z) = \alpha \neq 0, \qquad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Se $n = 1$ il polo è detto semplice.

Esampio 1: $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$ ha un polo doppio in $z = 1$ e semplice in $z = \pm\mathrm{i}$, in quanto

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^2 f(z) = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{z\to\pm\mathrm{i}}(z \mp \mathrm{i})f(z) = \frac{1}{4}.$$

Esempio 2: $g(z) = \dfrac{\sin(z)}{z^2}$ ha un polo semplice in $z = 0$, in quanto $\lim_{z\to 1} zg(z) = 1$.

Singolarità eliminabili Un punto z_0 rappresenta una *singolarità eliminabile* per $f(z)$ se $f(z_0)$ non è definito, ma il limite $\lim_{z\to z_0} f(z)$ esiste finito.

Esempio: le funzioni $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, $g(z) = \dfrac{\log(1+z)}{z}$ ed $h(z) = \dfrac{1-\cos(z)}{z^2}$ hanno una singolarità eliminabile in $z = 0$.

Punti di diramazione Essi riguardano le funzioni a più valori, ossia le funzioni che a uno stesso punto del dominio associano più valori (2,3,... o anche ∞).

Esempi: $w = \sqrt[n]{z}$, $w = \log(z)$. Ad un punto $z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$, $(\rho \neq 0)$, corrispondno: nel primo esempio, le radici n-esime di z, ossia gli n numeri

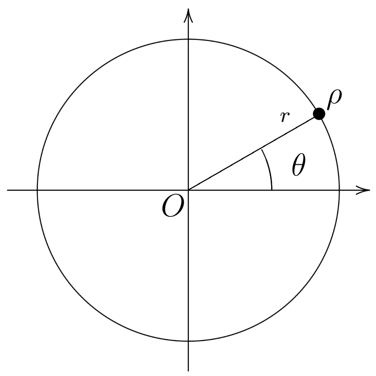
$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\Big(\cos\Big(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\Big) + \mathrm{i}\sin\Big(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\Big)\Big), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

e, nel secondo esempio, gli infiniti valori

$$w_k = \ln(\rho) + \mathrm{i}(\theta + 2k\pi), k = 0, 1, \ldots\ .$$

In ciascuno dei due esempi esiste la possibilità di limitare la variabilità dell'argomento di w in modo da renderla ad un sol valore. Nel primo esempio, posto $w = \sqrt[n]{z}\big(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta')\big)$, la scelta $0 \leqslant \theta' < 2\pi$ impone la scelta $k = 0$ ossia di considerare solo w_0, così come la scelta $2\pi \leqslant \theta' < 4\pi$ determina la scelta w_1, ecc. .
Nel secondo esempio avviene esattamente l'analogo, con la sola differenza che le scelte possibili per l'argomento di w sono infinite, come i possibili valori di k.
Sinteticamente si dice che a $\sqrt[n]{k}$ sono associati n *rami* e a $\log(z)$ ne sono associati infiniti, uno per ogni scelta di k. Questi rami sono detti *piani di Riemann*. Si dice che z_0 è un punto di diramazione per una funzione a più valori $f(z)$ se una rotazione (lungo una curva chiusa) intorno a z_0 fa passare da un ramo della funzione ad un altro.

Esempio 1 $w = \sqrt{z}$. Supponiamo di far percorrere alla z un giro completo intorno all'origine in senso positivo (verso antiorario), partendo da un punto P_0 (fig. 1.4). La rotazione è descritta



dalla relazione $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, dove $r = \overline{OP_0}$. Inizialmente, ossia nel punto di partenza, $z = z_0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ e $w = w_0 = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$; dopo un giro completo attorno all'origine si ha $z = z_0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2\pi)}$ e $w = w_0 = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2\pi}{2}} = -\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$: il valore di arrivo della funzione è diverso (opposto) da quello di partenza. Da notare che se si compiono due giri allora $w = w_0 = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+4\pi}{2}} = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$, ossia il valore di arrivo coincide con quello di partenza.
Generalizzando l'osservazione si puo affermare che ogni rotazione attorno all'origine di un numero dispari di giri fa passare dal valore iniziale a quello opposto, mentre il valore resta invariato nel caso in cui il numero di giri sia pari. Per i suddetti motivi si dice che $z = 0$ è un punto di diramazione e che la funzione possiede due piani di Riemann.
Da notare che $z = 0$ è l'unico punto di diramazione, in quanto una rotazione completa intorno ad un qualsiasi altro punto (che non includa $z = 0$) non modifica l'argomento iniziale del punto, ossia partendo da un punto di un piano si torna esattamente allo stesso punto.
Nel caso in considerazione si dice che la funzione possiede due piani di Riemann e che si passa da un piano all'altro mediante una rotazione completa attorno all'origine.
Naturalmente la funzione, in ognuno dei due piani, è ad un sol valore. Allo scopo di evitare confusione tra i valori assunti nei due piani, si conviene di introdurre una barriera artificiale che inpedisca il passaggio dall'uno all'altro. Tale barriera viene definita *retta di diramazione* e, nel caso specifico, è la semiretta reale positiva con punto iniziale l'origine degli assi. Questo significa che i punti del primo piano hanno argomento $0 \leqslant \theta < 2\pi$ e quelli del secondo piano hanno argomento $2\pi \leqslant \theta < 4\pi$.

Esempio 2 $w = \log(z)$. Anche qui $z = 0$ è punto di diramazione. Supponiamo infatti di partire da un punto z_0 del piano complesso per il quale sia $r = |z_0|$ e $\theta = \theta_0$ cui corrispondono il valore principale del logaritmo $\log(z_0) = \ln(r) + \mathrm{i}\theta$. Se ora, partendo dal punto z_0, si compie un giro completo intorno l'origine in senso positivo (antiorario), ritornando in z_0 si trova $r = |z_0|$ e $\theta = \theta + 2\pi$. Di conseguenza il nuovo valore del logaritmo naturale è $\log(z_0) = \ln(z) + \mathrm{i}(\theta_0 + 2\pi)$. Questo significa che la rotazione ha comportato il passaggio ad un altro ramo (piano) della funzione e dunque che $z = 0$ è punto di diramazione. Un ulteriore giro completo comporta il passaggio ad un terzo ramo in quanto $\log(z_0) = \ln(z) + \mathrm{i}(\theta_0 + 4\pi)$. È evidente che, qualunque sia il numero di giri, non si ritorna mai al piano iniziale ma che, anzi, si incontrano sempre nuovi rami nuovi. Per questo motivo si dice che la funzione ha infiniti rami. Il ramo particolare per il quale $\log(z)$ è reale e positivo quando z è reale e positivo è definito *ramo principale*.

Esso corrisponde alla scelta $\theta = 0$ quando z è reale e positivo e questo implica che in esso $0 \leqslant \theta < 2\pi$, oppure $-\pi \leqslant \theta < \pi$. In quest'ultimo caso la retta di diramazione è costituita dalla semiretta reale negativa.

Naturalmente, per immediata estensione dei risultati precedenti, si può affermare che $w = \sqrt{z-a}$ ha punto di diramazione in $z = a$ e che la retta di diramazione è la semiretta reale che inizia con $z = a$ e termina in $z = +\infty$. Per gli stessi motivi $w = \log(z-a)$ ha punto di diramazione in $z = a$ e la retta di diramazione è la semiretta reale che inizia con $z = a$ e termina con $z = -\infty$.

Osservazione $w = \sqrt[3]{z}$ ha un punto di diramazione in $z = 0$ con tre rami e la retta di diramazione è la semiretta positiva con punto iniziale $z = 0$.
$w = \sqrt{z^2+1}$ ha due punti di diramazione ($z = \pm\mathrm{i}$) perchè una rotazione attorno a ciascuno dei due punti (purchè non così ampia da includere l'altro punto) fa passare da un ramo all'altro. In questo esempio i rami sono due e la retta di diramazione è il segmento che unisce il punto $z = -\mathrm{i}$ con il punto $z = \mathrm{i}$ (figura 1.6), oppure (il che è equivalente) l'unione delle semirette riportate in figura 1.7 Le funzioni $w = \log(z^2+z-2)$ e $w = \sqrt[5]{z(z^2+2)}$ hanno come punti di

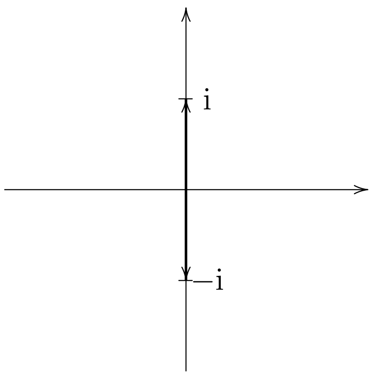


Figura 1.6: Retta di diramazione per $w = \sqrt{z^2+1}$

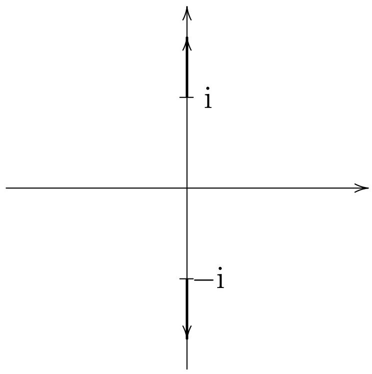


Figura 1.7: Altra retta di diramazione per $w = \sqrt{z^2+1}$

diramazione $z = 1, -2$ e $z = 0, \pm\mathrm{i}\sqrt{2}$ rispettivamente.

Singolarità essenziali Una singolarità non eliminabile che non sia nè un polo nè un punto di diramazione è, per definizione, una *singolarità essenziale*. Questo significa che, se z_0 è una singolarità essenziale, non esiste alcun intero positivo n tale che

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^n f(z) = \alpha \in \mathbb{C}.$$

Esempio $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ ha una singolarità essenziale in $z = 0$, in quanto non esiste alcun intero positivo n tale che $\lim_{z\to 0} z^n \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \alpha \in \mathbb{C}$. Questo puo essere dedotto anche dallo sviluppo in serie di $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$:

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \ldots$$

Singolarità all'infinito Tutte le considerazoni precedenti riguardano le singolarità al finito. Per quanto riguarda quelle all'infinito, si dice che $z = \infty$ è un punto di singolarità per $f(z)$ se (e solo se) lo è $w = 0$ per la funzione $f(\frac{1}{w})$.

Esempi La funzione $f(z) = z^3$ ha un polo di ordine tre all'infinito, dato che la funzione $f(\frac{1}{w})$ ha un polo di ordine tre in $w = 0$.
La funzione $f(z) = \mathrm{e}^z$ ha una singolarità essenziale in $z = \infty$, in quanto la funzione $\mathrm{e}^{\frac{1}{w}}$ ha una singolarità essenziale in $w = 0$.

Singolarità isolata Un punto singolare z_0 rappresenta una singolarità isolata se esso possiede un intorno nel quale non cadono altri punti singolari, ossia se esiste un $\delta > 0$ tale che tutti i punti $z \neq z_0$ con $|z - z_0| < \delta$ sono non singolari. Viceversa z_0 rappresenta un punto singolare non isolato (di accumulazione) se, qualunque sia $\delta > 0$, esiste almeno un altro punto singolare $z \neq z_0$ con $|z - z_0| < \delta$.

Esempi La funzione $f(z) = \dfrac{z+2}{(z-1)^2(z^2+3)}$ ha punti singolari $z = 1$ (doppio) e $z = \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$ (semplici), ciascuno dei quali è chiaramente isolato.
La funzione $\sec\left(\frac{1}{z}\right) = 1/\cos\left(\frac{1}{z}\right)$ ha come singolarità gli zeri di $\cos(\frac{1}{z})$, ossia i punti $\frac{1}{z_k} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Sono dunque singolari i valori $z_k = \frac{2}{(2k+1)\pi}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. A questi infiniti punti singolari si deve aggiungere $z = 0$, in quanto $f(z)$ non è ivi definita. Da notare che i punti $\{z_k\}$ rappresentano poli semplici in quanto

$$\lim_{z \to z_k} \left(z - \frac{2}{(2k+1)\pi}\right) f(z) = \lim_{z \to z_k} \frac{z - \frac{2}{(2k+1)\pi}}{\cos(\frac{1}{z})} \overset{H}{=} \lim_{z \to z_k} \frac{1}{-\frac{1}{z^2}\sin(\frac{1}{z})} = \frac{4(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} \neq 0.$$

Ognuno di essi è inoltre isolato in quanto, per ogni k, basta prendere un intorno di z_k con raggio inferiore alla distanza tra z_k e z_{k+1} per essere sicuri che in esso non cada alcun punto singolare. Al contrario $z = 0$ è una singolarità essenziale, in quanto non esiste alcun intero positivo n per cui $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\cos(\frac{1}{z})} = \alpha \in \mathbb{C}$. Infine $z = 0$ è una singolarità non isolata, dato che $z = 0$ è il limite degli z_k.

1.5 Integrazione nel campo complesso

Le differenze tra l'integrazione nel campo complesso e in quello reale sono molto più marcate rispetto a quelle esistenti sulla derivazione. Spesso quella nel campo complesso è molto più agevole rispetto a quella nel campo reale, tanto è vero che molte volte si utilizza l'integrazione nel campo complesso per il calcolo di integrali nel campo reale. Cominciamo con il calcolo degli integrali di linea, ossia con il calcolo dell'integrale di una funzione complessa su una curva $\mathcal{C}$.

Supponiamo $\mathcal{C}$ definita nel piano da equazioni parametriche

$$x = x(t) \, , \, y = y(t) \, , \, a \leq t \leq b.$$

Diciamo che $\mathcal{C}$ è regolare se $x(t)$ e $y(t)$ sono derivabili in $[a,b]$, con derivate continue e simultaneamente non nulle. In questo caso

$$z'(t) = x'(t)\boldsymbol{i} + y'(t)\boldsymbol{j}\ , \qquad \boldsymbol{i} \text{ e } \boldsymbol{j} \text{ versori sugli assi } x \text{ e } y,$$

rappresenta la tangente alla curva in $(x(t), y(t))$, che risulta variabile con continuità. Si dice che $\mathcal{C}$ è regolare a tratti quando $x'(t)$ e $y'(t)$ sono funzioni continue tranne in un numero finito di punti. In questo caso la curva si compone di più funzioni regolari che si raccordano in alcuni punti nei quali non è definita la tangente. Poiché i numeri complessi sono identificabili con punti del piano, il generico punto $(x(t), y(t))$ può essere identificato con il numero complesso $x(t) + \mathrm{i}y(t)$. Per esempio il cerchio unitario con centro l'origine e raggio 1, $|z| = 1$, orientato in senso antiorario, può essere così rappresentato parametricamente:

$$z(t) = \cos t + \mathrm{i}\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Come t cresce tra 0 e 2π il punto parte da $(1,0)$ e percorre il cerchio, in senso antiorario, fino a ritornare nel punto di partenza. Se una curva è definita parametricamente dalla relazione $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ per $a \leq t \leq b$, $z(t)$ si muove lungo la curva, secondo una specifica direzione, al variare di t tra a e b (Figura 1.8).

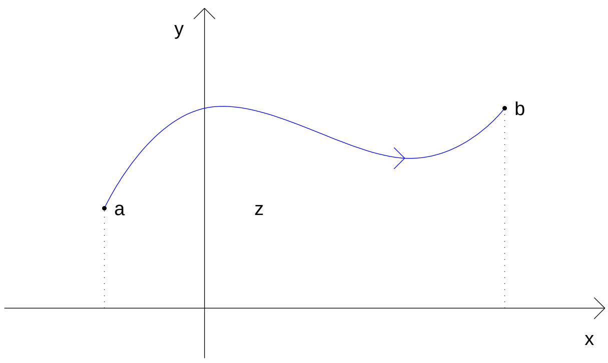


Figura 1.8:

Integrale lungo la curva $\mathcal{C}$. Sia $f(z)$ una funzione complessa di variabile complessa. Supponiamo che $z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ descrive una curva $\mathcal{C}$ al variare di $a \leq t \leq b$. Suddividiamo $[a,b]$ inserendovi un insieme di punti

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

e indichiamo con $z_j = z(t_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, i corrispondenti punti sulla curva. In ogni intervallino $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, prendiamo un punto τ_j e consideriamo la somma

$$\sum_{j=1}^{n} f(\hat{z}_j)(z_j - z_{j-1}), \qquad \text{dove } \hat{z}_j = z(\tau_j),\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Facciamo tendere $n \to \infty$, nell'ipotesi che conseguentemente $|t_j - t_{j-1}| \to 0$. Se la somma considerata converge ad L, qualunque sia la scelta dei punti τ_j operata, si dice che L è l'integrale di linea della f su $\mathcal{C}$ e si scrive

$$L = \int_{\mathcal{C}} f(z)dz.$$

Teorema 1.13 *Se la f è continua su $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ è regolare a tratti, l'integrale della f su $\mathcal{C}$ esiste.*

Proprietà:

1. Se -$\mathcal{C}$ indica la curva ottenuta da $\mathcal{C}$ invertendone l'orientazione
$$\int_{-\mathcal{C}} f(z)dz = -\int_{\mathcal{C}} f(z)dz$$
2. qualunque sia il numero reale α,
$$\int_{\mathcal{C}} [\alpha f(z)]dz = \alpha \int_{\mathcal{C}} f(z)dz$$
3. se f e g sono entrambi integrabili su $\mathcal{C}$,
$$\int_{\mathcal{C}} [f(z) + g(z)]dz = \int_{\mathcal{C}} f(z)dz + \int_{\mathcal{C}} g(z)dz$$
4. se $\mathcal{C}$ è una curva regolare rappresentata parametricamente da $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$ ed inoltre f è una funzione continua su $\mathcal{C}$,
$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Esercizio 1.22 *Calcolare $\int_{\mathcal{C}} f(z)dz$, essendo*

1. $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ *e $\mathcal{C}$ il segmento di retta che unisce i punti* 1 *e* $2 + \mathrm{i}$.
L'equazione della retta su cui giace il segmento è $z(t) = 1 + (1 + \mathrm{i})t$, $0 \leq t \leq 1$. Pertanto
$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_0^1 (t + 1)z'(t)dt = \int_0^1 (t + 1)(1 + \mathrm{i})dt = \frac{3}{2}(1 + \mathrm{i}).$$
2. $f(z) = \sin(2z)$ *e $\mathcal{C}$ il segmento che unisce* $-\mathrm{i}$ *con* $-4\mathrm{i}$.
Poiché $z(t) = -\mathrm{i}t$, $1 \leq t \leq 4$,
$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \sin(2z)dz &= \int_1^4 \sin(-2t\mathrm{i})(-\mathrm{i})dt = \mathrm{i}\int_1^4 \sin(2t\mathrm{i})dt = \mathrm{i}\int_1^4 \mathrm{i}\sinh 2t dt \\ &= -\frac{1}{2}\cosh 2t\Big|_1^4 = \frac{1}{2}(\cosh 2 - \cosh 8).\end{aligned}$$

Supponiamo ora che $f(z)$ e $F(z)$ siano funzioni analitiche in un dominio $\mathcal{D}$ con $F'(z) = f(z)$ per ogni $z \in \mathcal{D}$. $F(z)$ è allora definita una primitiva (anti derivata) di $f(z)$. È evidente che se $F(z)$ è una primitiva lo è anche $F(z) + \alpha$, qualunque sia il numero complesso α. Sotto le suddette ipotesi, se $\mathcal{C}$ è una curva regolare z contenuta in un dominio $\mathcal{D}$ con estremi z_1 e z_2
$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$
Tale integrale è evidentemente nullo se la curva è chiusa. In analogia con il caso reale, $F(z)$ viene generalmente indicata nella forma
$$F(z) = \int f(z)dz.$$

Esempi:

- $\int(6z - 4\cos z)dz = 3z^2 - 4\sin z + c$
- $\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + c\,,\ n \neq -1$
- $\int \alpha^z dz = \frac{\alpha^z}{\ln\alpha} + c\,,\ \alpha > 0$
- $\int \cosh z dz = \sinh z + c$
- $\int \tan z dz = -\ln\cos z + c$
- $\int e^{\alpha z}\sin bz dz = \frac{e^{\alpha z}(\alpha\sin bz - b\cos bz)}{\alpha^2+b^2} + c$

Nell'integrazione complessa riveste un'importanza basilare un teorema di Cauchy (talvolta detto di Cauchy-Goursat), la cui introduzione necessita di alcune definizioni preliminari. Una curva $\mathcal{C}$ è detta semplice se non si interseca, ossia se $\mathcal{C}(t') = \mathcal{C}(t'')$ solo se $t' = t''$. Una curva semplice è chiusa se $\mathcal{C}(t') = \mathcal{C}(t'')$ solo se $t' = a$ e $t'' = b$, nell'ipotesi che la curva venga descritta da $x = x(t)$ e $y = y(t)$ per $a \leq t \leq b$. Un dominio $\mathcal{D}$ è **semplicemente connesso** se una qualsiasi curva chiusa ivi contenuta possiede unicamente punti di $\mathcal{D}$. Questo implica che $\mathcal{D}$ non contiene "buchi" (Figura 1.9). Diversamente il dominio è definito molteplicemente connesso (Figura 1.10).

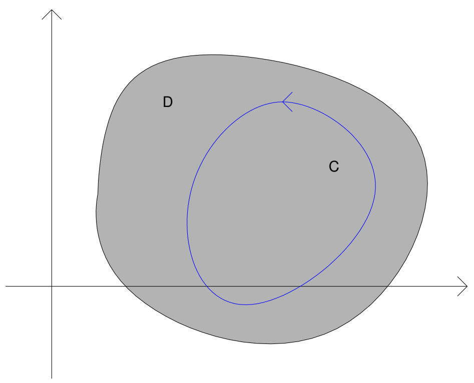


Figura 1.9:

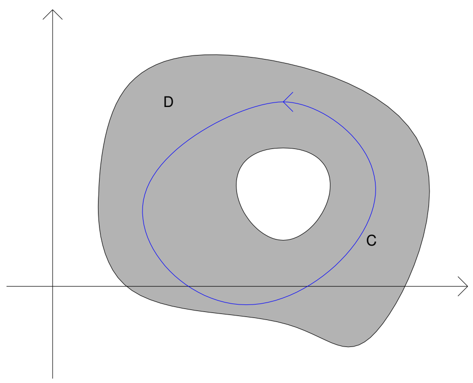


Figura 1.10:

Teorema 1.14 (Cauchy o Cauchy-Goursat) *Se f è una funzione analitica in un dominio semplicemente connesso $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C}$ è una qualsiasi curva chiusa ivi contenuta,*

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0.$$

Molto spesso, per meglio evidenziare che $\mathcal{C}$ è una curva chiusa, si scrive

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz \qquad \textit{in luogo di} \qquad \int_{\mathcal{C}} f(z)dz.$$

Esercizio 1.23

1. *Verificare, in modo diretto, che*
$$\oint_{\mathcal{C}}(z+2)dz=0$$
essendo $\mathcal{C}$ l'ellisse definita da $x(\theta)=4\cos\theta$ e $y(\theta)=3\sin\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$. Poiché $z+2$ è analitica in tutto il piano complesso e $\mathcal{C}$ è una curva chiusa, l'integrale è nullo per il teorema di Cauchy. Calcoliamo ora l'integrale in modo diretto
$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}}(z+2)dz &= \int_0^{2\pi}[(4\cos\theta+2)+\mathrm{i}3\sin\theta](-4\sin\theta+\mathrm{i}3\cos\theta)d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\{[-16\cos\theta\sin\theta-8\sin\theta-9\sin\theta\cos\theta]+\mathrm{i}[3\cos\theta(4\cos\theta+2)-12\sin^2\theta]\}d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{25}{2}\sin 2\theta-8\sin\theta+\mathrm{i}(12\cos 2\theta+6\cos\theta)\right]d\theta\\ &= \left[-\frac{25}{4}\cos 2\theta-8\sin\theta+6\mathrm{i}(\sin 2\theta+\sin\theta)\right]_0^{2\pi}=0\end{aligned}$$

2. *Dimostrare che*
$$\oint_{\mathcal{C}}e^{z^2}dz=0$$
essendo $\mathcal{C}$ il cerchio di centro l'origine e raggio 1. Il risultato è vero per il teorema di Cauchy, in quanto e^{z^2} (come abbiamo già visto) è analitica sul piano complesso e $\mathcal{C}$ è una curva chiusa.

3. *Dopo aver osservato che*
$$\oint_{\mathcal{C}}e^{z}dz=0,\qquad |z|=1$$
dimostrare che
$$\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\cos(\theta+\sin\theta)d\theta=0,\qquad \int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\sin(\theta+\sin\theta)d\theta=0.$$
Per il teorema di Cauchy
$$\oint_{\mathcal{C}}e^{z}dz=0,\qquad z=e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta,\qquad 0\le\theta<2\pi.$$
Di conseguenza, ricordando la formula di Eulero,
$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta)+\mathrm{i}\sin(\sin\theta)](-\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)d\theta=\\ &=\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}\{-[\cos(\sin\theta)\sin\theta+\sin(\sin\theta)\cos\theta]\\ &\qquad\qquad+\mathrm{i}[\cos(\sin\theta)\cos\theta-\sin(\sin\theta)\sin\theta]\}d\theta\\ &=\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}[-\sin(\sin\theta+\theta)+\mathrm{i}\cos(\sin\theta+\theta)]d\theta=0\end{aligned}$$
e il risultato è verificato, dovendo separatamente annullarsi la parte reale e quella immaginaria.

4. *Calcolare $\oint_{\mathcal{C}}(2z+\bar{z})dz$, essendo $|z|=1$. Poiché la funzione non è analitica, non è affatto detto che l'integrale sia nullo. Calcoliamolo in modo diretto:*
$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}}(2z+\bar{z})dz &= \int_0^{2\pi}(2e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta})e^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}d\theta\\ &= \mathrm{i}\int_0^{2\pi}[2(\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta)+1]d\theta\\ &= 2\pi\mathrm{i}.\end{aligned}$$

5. *Calcolare*
$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z}{(z+\mathrm{i})^2 \cos z} dz$$
essendo $\mathcal{C}$ il cerchio di centro l'origine e raggio α con $0 < \alpha < 1$. La funzione integranda è analitica, in quanto rapporto di funzioni analitiche, tranne negli zeri del denominatore ossia in $z = -\mathrm{i}$ e $z_k = (2k-1)\frac{\pi}{2}$, con k intero. In particolare è analitica nel cerchio $\mathcal{C}$ e pertanto, per il teorema di Cauchy, l'integrale è nullo.

Teorema 1.15 (Deformazione del dominio) *Sia $f(z)$ una funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$ limitato da due curve semplici chiuse $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ (Figura 1.11). Come conseguenza del Teorema di Cauchy*
$$\oint_{\mathcal{C}_1} f(z)dz = \oint_{\mathcal{C}_2} f(z)dz.$$

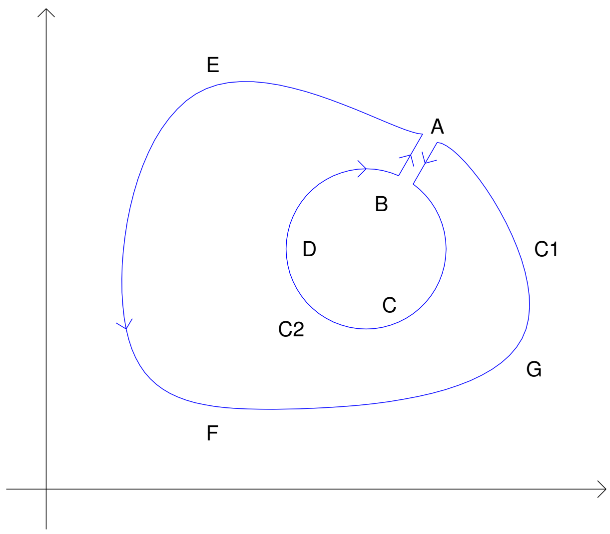


Figura 1.11:

Dimostrazione. Si uniscano le due curve $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ con un taglio lineare AB. Resta così definito un dominio chiuso e limitato definito dalla traiettoria ABCDBAEFGA chiusa, percorsa in senso antiorario a partire da A. Poiché all'interno del dominio da essa limitata la funzione è analitica, per ipotesi, e il dominio è semplicemente connesso, per il teorema di Cauchy
$$\int_{ABCDBAEFGA} f(z)dz =$$
$$= \int_{AB} f(z)dz + \int_{BCDB} f(z)dz + \int_{BA} f(z)dz + \int_{AEFGA} f(z)dz = 0.$$
Da cui, essendo $\int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz$, in quanto la stessa funzione viene integrata sulla stessa traiettoria, percorsa prima in un verso e poi in quello opposto, si ha che
$$\int_{AEFGA} f(z)dz = -\int_{BCDB} f(z)dz \text{ , ossia } \oint_{\mathcal{C}_1} f(z)dz = \oint_{\mathcal{C}_2} f(z)dz.$$
Per la conclusione finale basta osservare che la curva AEFGA che rappresenta $\mathcal{C}_1$ viene percorsa in senso antiorario e la BCDB in senso orario, per cui essa rappresenta $-\mathcal{C}_2$. □

Esercizio 1.24 *Calcolare*

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-\alpha}$$

*dove $\mathcal{C}$ è una qualsiasi curva semplice chiusa e α è: **(a)** esterno a $\mathcal{C}$; **(b)** interno a $\mathcal{C}$.*

*Nel caso **(a)** l'integrale è nullo per il teorema di Cauchy, in quanto $\frac{1}{z-\alpha}$ è analitica nel dominio semplicemente connesso $\mathcal{D}$ delimitato da $\mathcal{C}$ sulla stessa curva chiusa.*

*Nel caso **(b)**, indicato con Γ un cerchio di centro α e raggio $\epsilon > 0$ contenuto in $\mathcal{C}$ (Figura 1.12), per il teorema sulla deformazione del dominio*

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-\alpha} = \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-\alpha}.$$

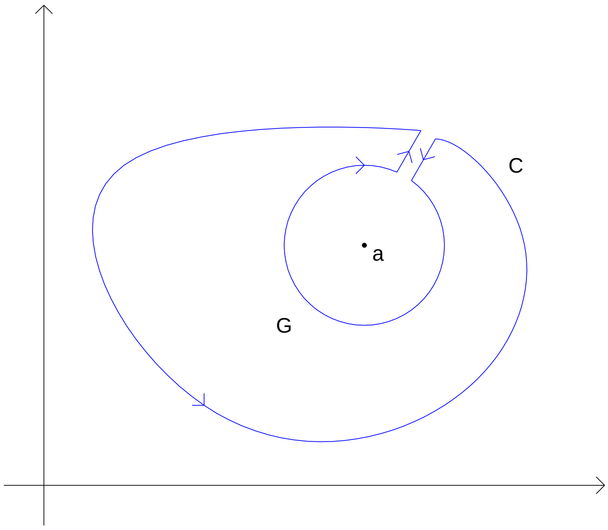


Figura 1.12:

Questo secondo integrale può essere facilmente calcolato in modo diretto, in quanto lungo la frontiera di Γ, $z = \alpha + \epsilon e^{\mathrm{i}\theta}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Pertanto

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-\alpha} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}\epsilon e^{\mathrm{i}\theta} d\theta}{\epsilon e^{\mathrm{i}\theta}} = 2\pi\mathrm{i}$$

e dunque $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-\alpha} = 2\pi\mathrm{i}.$

Il risultato precedente si può facilmente generalizzare al calcolo di

$$I_n = \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z-\alpha)^n} \;,\; n = 2, 3, \ldots$$

Come nel caso precedente, $I_n = 0$ se α è esterno al dominio definito da $\mathcal{C}$ e, se α è interno a $\mathcal{C}$, può essere calcolato nel modo seguente

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z-\alpha)^n} &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}\epsilon e^{\mathrm{i}\theta} d\theta}{\epsilon^n e^{\mathrm{i}n\theta}} = \frac{\mathrm{i}}{\epsilon^{n-1}} \left. \frac{e^{\mathrm{i}(1-n)\theta}}{\mathrm{i}(1-n)} \right|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \left[\frac{e^{\mathrm{i}(1-n)2\pi} - 1}{1-n} \right] = 0 \;,\; n = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Si può pertanto affermare che:

1. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z-\alpha)^n} = 0$ se α è esterno a $\mathcal{C}$;

2. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z-\alpha)^n} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} & \text{se } n=1 \\ 0 & \text{se } n=2,3,\dots \end{cases}$ se α è interno a $\mathcal{C}$.

Teorema 1.16 (Generalizzazione del teorema di deformazione del dominio) *Sia $f(z)$ analitica in una regione del piano delimitata dalle curve chiuse, semplici e che non si intersecano $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$, con $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ interne a $\mathcal{C}$ (Figura 1.13). Sotto tali condizioni*

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = \oint_{\mathcal{C}_1} f(z)dz + \cdots + \oint_{\mathcal{C}_n} f(z)dz.$$

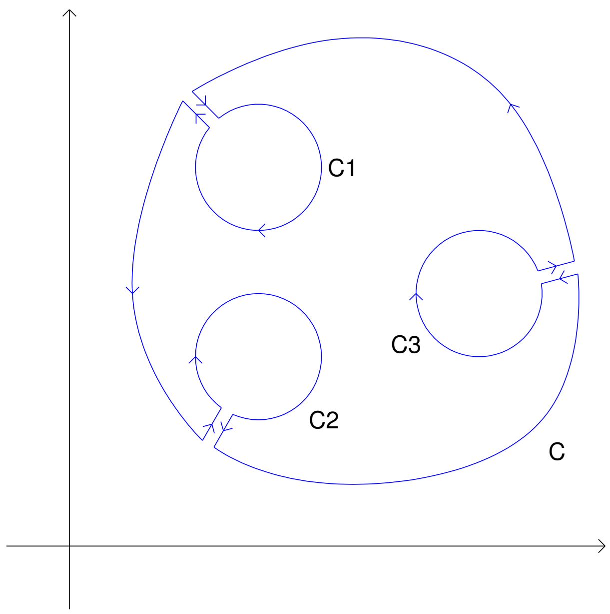


Figura 1.13:

Esercizio 1.25 *Calcolare $\oint_{\mathcal{C}} \bar{z}^2 dz$ lungo i cerchi $|z| = 1$ e $|z-1| = 1$. Non è detto che l'integrale sia nullo, in quanto la funzione non è analitica, come è immediato osservare, verificando che non sono soddisfatte le condizioni di Cauchy-Riemann.*

Nel primo caso, essendo $z = e^{\mathrm{i}\theta}$,

$$\oint_{\mathcal{C}} \bar{z}^2 dz = \int_0^{2\pi} e^{-2\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta} d\theta = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{i}\theta} d\theta = \mathrm{i}\left.\frac{e^{-\mathrm{i}\theta}}{-\mathrm{i}}\right|_0^{2\pi} = -\left. e^{-\mathrm{i}\theta}\right|_0^{2\pi} = 0.$$

Nel secondo caso, $z = 1 + e^{\mathrm{i}\theta}$ e pertanto

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} \bar{z}^2 dz &= \int_0^{2\pi} (1+e^{-\mathrm{i}\theta})^2 \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} (1 + e^{-2\mathrm{i}\theta} + 2e^{-\mathrm{i}\theta})\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta} d\theta \\ &= \mathrm{i}\int_0^{2\pi} (e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta} + 2) d\theta = 2\mathrm{i}\int_0^{2\pi} (\cos\theta + 1) d\theta = 2\mathrm{i}\left[\sin\theta + \theta\right]_0^{2\pi} = 4\pi\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Esercizio 1.26 *Calcolare* $\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-2}$ *lungo* ***(a)*** *il cerchio* $|z-2| = 4$, ***(b)*** *il cerchio* $|z-1| = 5$, ***(c)*** *il quadrato con i vertici* $2 \pm 2\mathrm{i}$, $-2 \pm 2\mathrm{i}$.

Per quanto già osservato, essendo $\frac{1}{z-2}$ *analitica tranne in 2, punto interno a ciascuna delle tre curve, si avrà in entrambi i casi*

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-2} = 2\pi\mathrm{i}.$$

Un'altra fondamentale conseguenza del teorema di Cauchy è la cosiddetta indipendenza dell'integrale dal cammino di integrazione.

Teorema 1.17 (Indipendenza dal percorso) *Sia* $f(z)$ *analitica in un dominio* $\mathcal{D}$ *semplicemente connesso. Indicati con* a *e* b *due punti qualsiasi di* $\mathcal{D}$ *(Figura 1.14), il valore di* $\int_a^b f(z)dz$ *è del tutto indipendente dal percorso seguito per unire* a *con* b*.*

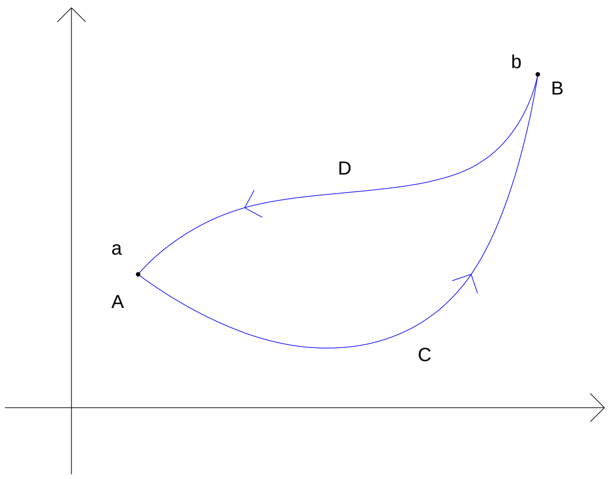


Figura 1.14:

Dimostrazione. Sia $\mathcal{C}$ la curva chiusa formata dalle curve ACB e BDA che uniscono rispettivamente a con b e viceversa b con a.

Per il teorema di Cauchy

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_{ACB} f(z)dz + \int_{BDA} f(z)dz = 0$$

e pertanto, osservato che $\int_{BDA} f(z)dz = -\int_{ADB} f(z)dz$ in conseguenza dell'inversione del verso di percorrenza della curva,

$$\int_{ACB} f(z)dz = \int_{ADB} f(z)dz.$$

Il risultato è dunque del tutto indipendente dal percorso. □

Esercizio 1.27 *Indicata con* $\mathcal{C}$ *la cubica* $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ *che congiunge i punti* $(1,1)$ *e* $(2,3)$*, calcolare*

$$\oint_{\mathcal{C}} (12z^2 - 4\mathrm{i}z)dz.$$

Poiché il valore dell'integrale è indipendente dal percorso, per semplicità, possiamo calcolare l'integrale lungo il segmento lineare che unisce gli estremi della curva, ossia procedendo lungo la retta di equazione $z = t + \mathrm{i}(2t-1)$, $1 \le t \le 2$. *Si ottiene così*

$$\int_{1+\mathrm{i}}^{2+3\mathrm{i}} (12z^2 - 4\mathrm{i}z)dz = \left[4z^3 - 2\mathrm{i}z^2\right]_{1+\mathrm{i}}^{2+3\mathrm{i}} = -156 + 38\mathrm{i}.$$

Naturalmente si perviene allo stesso risultato calcolando

$$\begin{aligned} &4\int_1^2 \{3[t+\mathrm{i}(2t-1)]^2 - \mathrm{i}[t+\mathrm{i}(2t-1)]\}(1+2\mathrm{i})dt \\ &= 4(1+2\mathrm{i})\int_1^2 [(-9t^2+14t-4) + \mathrm{i}(12t^2-7t)]dt \\ &= 4(1+2\mathrm{i})\left[\left(-3t^3+7t^2-4t\right) + \mathrm{i}(4t^3 - \frac{7}{2}t^2\Big)\right]_1^2 \\ &= (1+2\mathrm{i})(-16+\mathrm{i}70) = -156+38\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Esercizio 1.28 *Calcolare*

$$\int_{\mathcal{C}} (z^2+1)^2 dz$$

lungo l'arco di cicloide $x = \alpha(\theta - \sin\theta)$, $y = \alpha(1-\cos\theta)$, α *numero positivo, compreso tra il punto in cui* $\theta = 0$ *e il punto in cui* $\theta = 2\pi$.

Osservato che $z_1 = x(0) + \mathrm{i}y(0) = 0$ *e* $z_2 = x(2\pi) + \mathrm{i}y(2\pi) = 2\pi\alpha$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} (z^2+1)^2 dz &= \int_{z_1}^{z_2} (z^2+1)^2 dz = \int_0^{2\pi\alpha} (z^4+2z^2+1)dz = \left[\frac{z^5}{5} + \frac{2}{3}z^3 + z\right]_0^{2\pi\alpha} \\ &= \frac{1}{15}(96\pi^5\alpha^5 + 80\pi^3\alpha^3 + 2\pi\alpha) = \frac{2\pi\alpha}{15}(48\pi^4\alpha^4 + 40\pi^2\alpha^2 + 1). \end{aligned}$$

Esercizio 1.29 *Dopo aver osservato che* $\int_{\mathcal{C}} e^{-2z}dz$ *è indipendente dalla traiettoria che unisce i punti* $1-\pi\mathrm{i}$ *e* $2+3\pi\mathrm{i}$, *calcolarne il valore.*

Il risultato non dipende dalla traiettoria, ma solo dai punti estremi, in quanto e^{-2z} *è ovunque analitica. Di conseguenza, unendo i due punti in linea retta,*

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} e^{-2z}dz &= \int_{1-\pi\mathrm{i}}^{2+3\pi\mathrm{i}} e^{-2z}dz = -\frac{1}{2}e^{-2z}\Big|_{1-\pi\mathrm{i}}^{2+3\pi\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\left[e^{-2(1-\pi\mathrm{i})} - e^{-2(2+3\pi\mathrm{i})}\right] \\ &= \frac{1}{2}e^{-2}(e^{2\pi\mathrm{i}} - e^{-2}e^{-6\pi\mathrm{i}}) = \frac{1}{2}e^{-2}(1-e^{-2}). \end{aligned}$$

1.6 Formule integrali di Cauchy e conseguenze

Le formule integrali di Cauchy rendono evidenti alcune fondamentali differenze tra le funzioni complesse e quelle reali. La prima formula integrale di Cauchy dimostra, in particolare, che il valore in un punto z_0 di una funzione analitica dipende unicamente dai valori che essa assume in una qualsiasi curva chiusa semplice C che circonda z_0. Questo consente di ridurre il calcolo dell'integrale della $f(z)$ su C alla valutazione della f in z_0.

Teorema 1.18 (Formula integrale di Cauchy) *Sia f una funzione analitica in un dominio semplicemente connesso $\mathcal{D}$. Supponiamo inoltre che z_0 sia un punto interno a $\mathcal{D}$ e che C sia una curva chiusa semplice contenuta in $\mathcal{D}$ avente z_0 al suo interno. Sotto tali ipotesi*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Dimostrazione. In conseguenza del teorema di deformazione del dominio, indicata con $\widehat{C}$ una circonferenza con centro z_0 e raggio r contenuta in C (Figura 1.15), si può affermare che

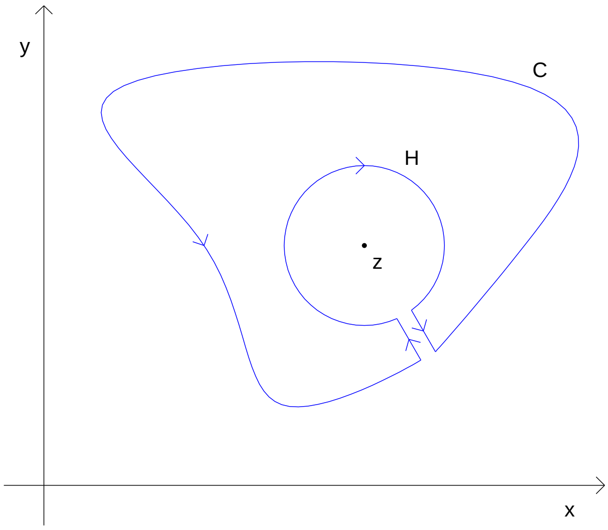


Figura 1.15:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \oint_{\widehat{C}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Pertanto, essendo $z = z_0 + re^{\mathrm{i}\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$,

$$\oint_{\widehat{C}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{\mathrm{i}\theta})}{re^{\mathrm{i}\theta}} re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\, d\theta = \mathrm{i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\mathrm{i}\theta})\, d\theta,$$

ossia

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \mathrm{i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\mathrm{i}\theta})\, d\theta,$$

da cui, tenendo conto della continuità della f su $\widehat{C}$,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \lim_{r \to 0} \mathrm{i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\mathrm{i}\theta})\, d\theta = \mathrm{i} \int_0^{2\pi} f(z_0)\, d\theta = 2\pi\mathrm{i} \cdot f(z_0).$$

$\square$

Esercizio 1.30 *Calcolare, mediante la formula integrale di Cauchy,*

$$I = \oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}\, dz,$$

essendo C una curva chiusa semplice con $z = 1$ e $z = 2$ al suo interno.

Poiché $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$,

$$\begin{aligned} I &= \oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-2}\, dz - \oint_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-1}\, dz, \quad \textit{(formula di Cauchy)} \\ &= 2\pi \mathrm{i}(\sin 4\pi + \cos 4\pi) - 2\pi \mathrm{i}(\sin \pi + \cos \pi) = 4\pi \mathrm{i}. \end{aligned}$$

Estensione della formula di Cauchy al caso dei domini multiconnessi. Supponiamo che il dominio $\mathcal{D}$ sia molteplicemente connesso, come nella Figura 1.16. Allora, indicati con $\widehat{C}$ una

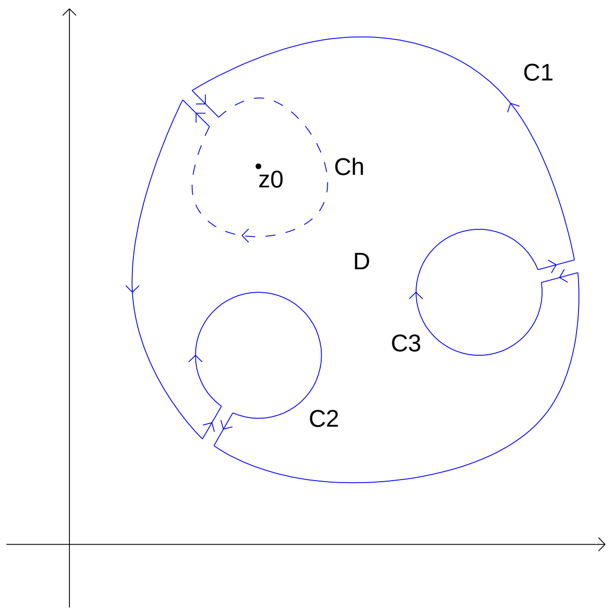


Figura 1.16:

curva chiusa semplice interamente contenuta in $\mathcal{D}$ e con C l'intera frontiera di $\mathcal{D}$ percorsa in modo da lasciare sempre $\mathcal{D}$ alla sinistra, risulta

$$\left(\oint_{C_1} - \oint_{C_2} - \oint_{C_3} \right) \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \oint_{\widehat{C}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 0,$$

da cui, per la formula integrale di Cauchy,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \oint_{\widehat{C}} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi \mathrm{i} \cdot f(z_0).$$

Di conseguenza, per i domini multiconnessi vale la seguente estensione della formula di Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz,$$

dove C è il percorso complessivo $C_1 - C_2 - C_3$, orientato in modo da lasciare sempre alla sinistra il dominio $\mathcal{D}$.

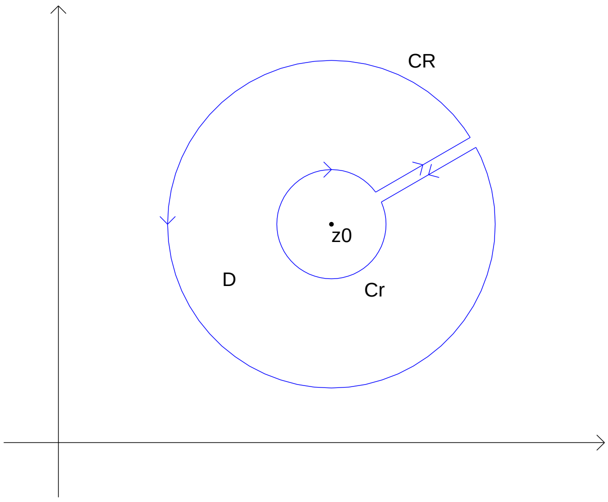


Figura 1.17:

Esempio 1.1 *Il caso particolare dell'anello. Supponiamo che $\mathcal{D}$ sia il dominio compreso tra due cerchi di raggio R ed r rispettivamente. In questo caso*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{\mathcal{C}_R} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \oint_{\mathcal{C}_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\right]$$

dove $\mathcal{C}_R$ e $\mathcal{C}_r$ indicano due circonferenze con centro z_0 e raggi rispettivamente R ed r, ambedue percorse in senso antiorario. Di conseguenza il calcolo dell'integrale di $\frac{f(z)}{z-z_0}$ lungo la frontiera $\mathcal{C}_R - \mathcal{C}_r$ del dominio $\mathcal{D}$ limitato dalle due circonferenze e percorso in senso antiorario, nel caso $f(z)$ sia analitica e $z_0 \in \mathcal{D}$ è semplicemente $2\pi i f(z_0)$.

Esercizio 1.31

1. *Calcolare* $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{z^2}}{z+i}\,dz$.
2. *Calcolare* $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\,dz$ *lungo un rettangolo con vertici in:*
   (a) $2 \pm i$, $-2 \pm i$;
   (b) $2 \pm i$, $\pm i$.
3. *Verificare che* $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{zt}}{z^2+1}\,dz = \sin(t)$, *essendo $\mathcal{C}$ la circonferenza $|z| = 2$ e t un qualsiasi numero positivo.*

(1) Si presentano due casi a seconda che $-i$ sia esterno o interno a $\mathcal{C}$. Nel primo caso l'integrale è nullo per il teorema di Cauchy. Nel secondo caso vale $2\pi i e^{(-i)^2} = 2\pi e^{-1} i$.

(2) Caso (2a). Poiché $\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)$, osservato che ± 1 cadono entrambi all'interno del rettangolo,

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\,dz = \frac{1}{2}\left[\oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\pi z)}{z-1}\,dz - \oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\pi z)}{z+1}\,dz\right] = \pi i[\cos(\pi) - \cos(-\pi)] = 0.$$

Caso (2b). Essendo -1 esterno al rettangolo, in base alla formula precedente,

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\,dz = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos(\pi z)}{z-1}\,dz = \pi i\cos(\pi) = -\pi i.$$

(3) Poiché $\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$ e ambedue i numeri $\pm i$ sono interni a $\mathcal{C}$,

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{zt}}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2i}\left[\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{zt}}{z-i}\,dz - \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{zt}}{z+i}\,dz\right] = 2\pi i\frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) = 2\pi i\sin(t)$$

e dunque il risultato è esatto.

1.6.1 Formula integrale per le derivate di ordine superiore.

Procedendo per induzione, la formula integrale di Cauchy può essere estesa alle derivate di ordine superiore nel modo seguente: se f è analitica in un dominio semplicemente connesso $\mathcal{D}$ e z_0 è interno a $\mathcal{D}$, f è indefinitamente derivabile in z_0 e inoltre, per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \tag{1.1}$$

dove $\mathcal{C}$ è una qualsiasi curva chiusa contenuta in $\mathcal{D}$ e contenente z_0 al suo interno.

Esercizio 1.32 *Calcolare:*

1. $\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz$*, dove $\mathcal{C}$ è la circonferenza $|z| = \frac{\pi}{3}$;*
2. $\oint_{\mathcal{C}} \frac{\sin(z^2)}{(z+1)^3}\,dz$*, essendo $\mathcal{C}$ una curva chiusa semplice contenente il punto $z = -1$ al suo interno;*
3. $\oint_{\mathcal{C}} \frac{2z\cos(hz)}{(z-2+4i)^2}\,dz$*, essendo $\mathcal{C}$ una curva chiusa semplice con $2-4i$ al suo interno.*

(1) Poiché e^{2z} è ovunque analitica e -1 è interno al cerchio $\mathcal{C}$, per la formula integrale relativa alla derivata terza,

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!}\left[\frac{d^3}{dz^3}e^{2z}\right]_{z=-1} = \frac{2\pi i}{6}8e^{-2} = \frac{8}{3}\pi e^{-2}i.$$

(2) Se -1 non cade all'interno di $\mathcal{C}$, l'integrale è nullo dato che $\frac{\sin(z^2)}{(z+1)^3}$ risulterebbe analitica in $\mathcal{C}$. Se invece $\mathcal{C}$ include -1, per la formula integrale relativa alle derivate seconde ($n = 2$),

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\sin(z^2)}{(z+1)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{d^2}{dz^2}\sin(z^2)\right]_{z=-1} =$$
$$= \pi i\left[2\cos(z^2) - 4z^2\sin(z^2)\right]_{z=-1} = 2\pi i(cos(1) - 2\sin(1)).$$

(3) Naturalmente l'integrale è nullo se $2-4i$ è esterno a $\mathcal{C}$. In caso contrario, si può applicare la formula integrale relativa alla derivata prima. Più precisamente, osservato che $\frac{d}{dz}(2z\cos(hz)) = 2(\cos(hz) + h\sin(hz))$,

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{2z\cos(hz)}{(z-2+4i)^2}\,dz = 4\pi i[\cos(h(2-4i)) + (2-4i)\sin(h(2-4i))]$$

Teorema 1.19 (Teorema di Liouville) *Supponiamo che $f(z)$ sia una funzione analitica nell'intero piano complesso e che la f sia ivi limitata, ossia che esista un numero L tale che $|f(z)| \leq L$ per ogni numero complesso z. Sotto tali ipotesi la funzione $f(z)$ è costante.*

La dimostrazione, che qui viene omessa, è basata sulla formula integrale di Cauchy. Il teorema 1.19 implicitamente stabilisce che una funzione non costante e analitica su tutto il piano complesso è non limitata. Di conseguenza funzioni come $\sin(z)$ e $\cos(z)$ non sono limitate nel piano complesso, anche se lo sono in quello reale.

Altra conseguenza quasi immediata è il seguente:

Teorema 1.20 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$, con n positivo, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ complessi e $a_0 \neq 0$, possiede esattamente n zeri, ossia n numeri z_i, $i = 1, \ldots, n$, tali che $p(z_i) = 0$.*

La semplice dimostrazione si avvale del teorema 1.19.

Dimostrazione. Si può dimostrare per induzione. Per $n = 1$ è banale. Supponiamo che per un polinomio di grado $n-1$ sia vero. Un polinomio di grado n deve avere almeno uno zero: infatti, in caso contrario, la funzione $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ sarebbe analitica su tutto il piano e ivi limitata, dato che $|f(z)| \to 0$ per $|z| \to +\infty$, e questo contraddice il teorema di Liouville, in quanto la f non è costante. Sia z_n questo zero. Dividendo il polinomio $p(z)$ per $(z - z_n)$ si elimina lo zero, ottenendo un polinomio di grado $n-1$, che, per ipotesi, ha esattamente altri $n-1$ zeri $z_1, \ldots, z_{n-1}$. Il numero di zeri è quindi esattamente pari ad n, ed il teorema è dimostrato. □

1.7 Funzioni analitiche e serie di Taylor

Teorema 1.21 (Teorema di Taylor) *Sia f una funzione analitica in un cerchio $\mathcal{C}$ con centro in z_0. Sotto tali ipotesi, per ogni $z \in \mathcal{C}$, la f è sviluppabile nella serie di potenze*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \\ &\quad + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \ldots \,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Per la formula integrale di Cauchy, indicato con $\mathcal{C}_1$ un cerchio (avente centro z_0) interno a $\mathcal{C}$ e con z un qualsiasi punto interno a $\mathcal{C}_1$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \tag{1.3}$$

Poiché

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0}\frac{\left[1-\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n\right]+\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} \\ &= \frac{1}{w-z_0}\left\{1+\frac{z-z_0}{w-z_0}+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^{n-1}\right\}+\frac{1}{w-z}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \end{aligned}$$

per la formula integrale di Cauchy,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw\\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{f(w)}{w-z_0}\,dw + \frac{z-z_0}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2}\,dw + \dots + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^n}\,dw\\
&+ \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n\frac{f(w)}{(w-z_0)^n}\,dw
\end{aligned}$$

Si può ora osservare che qualunque sia $z \in \mathcal{C}$, l'ultimo addendo qui sopra tende a zero per $n \to \infty$, in quanto la f è limitata in $\mathcal{C}_1$ e $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$, dato che z è interno a $\mathcal{C}_1$ e w è sulla frontiera di $\mathcal{C}_1$.

Pertanto, per $n \to \infty$, $f(z)$ è rappresentabile come una serie di potenze del tipo

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots$$

dove, per le formule integrali di Cauchy,

$$\begin{aligned}
a_0 &= f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{f(w)}{w-z_0}\,dw \qquad \text{e}\\
a_n &= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw \quad \text{, per } n = 1, 2, \dots.
\end{aligned}$$

□

Esercizio 1.33

1. *Sviluppare in una serie di potenze centrata in $z_0 = 0$, la funzione $y = \log(1+z)$ nell'ipotesi che $\arg(\log(1)) = 0$;*
2. *determinare il raggio di convergenza della suddetta serie;*
3. *sviluppare in una serie di Taylor, centrata in $z_0 = 0$, la funzione $\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$*

(1)

$$\begin{array}{ll}
f(z) = \log(1+z), & f(0) = 0\\
f'(z) = (1+z)^{-1}, & f'(0) = 1\\
f''(z) = -(1+z)^{-2}, & f''(0) = -1\\
f'''(z) = 2(1+z)^{-3}, & f'''(0) = 2\\
\vdots & \\
f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+z)^{-n}, & f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!
\end{array}$$

Pertanto, ricordando che

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2}z^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \dots$$

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n + \dots$$

(2) Per il criterio del rapporto applicato alla serie di potenze, essendo $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$*,*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = 1$$

e pertanto il raggio di convergenza è 1.

(3) Sostituendo z *con* $-z$ *nello sviluppo di* $\log(1+z)$ *si ottiene:*

$$\log(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \cdots - \frac{1}{n}z^n + \ldots$$

Il cui raggio di convergenza è ugualmente 1. Sottraendo $\log(1-z)$ *da* $\log(1+z)$ *si ottiene:*

$$\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots\right) = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

anche'essa convergente per $|z| < 1$.

Esercizio 1.34 *Sviluppare* $f(z) = \sin(z)$ *in una serie di Taylor centrata in* $z_0 = \pi/4$ *e determinare il suo raggio di convergenza.*

Si ha

$$\begin{array}{ll} f(z) = \sin(z), & f(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ f'(z) = \cos(z), & f'(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ f''(z) = -\sin(z), & f''(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ f'''(z) = -\cos(z), & f'''(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ f''''(z) = \sin(z), & f''''(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{3!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \cdots = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 + \left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^4 + \ldots\right\} \end{aligned}$$

Per il criterio del rapporto il raggio di convergenza della serie $R = +\infty$ *in quanto, qualunque sia il valore di z,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\frac{(n+1)!}{1} = +\infty$$

Ci sono dei casi nei quali lo sviluppo in serie di Taylor può essere ottenuto in modo diretto facendo ricorso a sviluppi ben noti. Supponiamo, ad esempio, di voler determinare la serie di Taylor della funzione e^z centrata in i. La serie è evidentemente

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-i)^n \quad \text{, con } a_n = \frac{f^{(n)}(i)}{n!}.$$

Poiché $f(z) = e^z$ e $f^{(n)}(z) = e^z$, $a_n = \frac{e^i}{n!}$. Lo stesso risultato è ottenibile mediante il seguente artificio, basato sulla conoscenza dello sviluppo di $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$:

$$e^{z-i} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-i)^n}{n!} \qquad \text{e dunque}$$

$$e^z = e^i e^{z-i} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^i}{n!}(z-i)^n \quad .$$

Sfruttando la stessa idea, ossia la conoscenza di sviluppi in serie noti, è talvolta immediato calcolare altri sviluppi in serie. Ad esempio, ricordando che $\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$, è immediato sviluppare in serie di Taylor centrata in i la funzione $\sin(z-i)^2$. Sarà infatti sufficiente scrivere

$$\sin(z-i)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[(z-i)^2\right]^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z-i)^{4n+2}$$

Esercizio 1.35 *Sviluppare $1/(1+z)$ in una serie di Taylor centrata in $-2i$.*

La serie è evidentemente del tipo

$$\tfrac{1}{1+z} = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z+2i)^n \quad , a_n = \tfrac{f^{(n)}(-2i)}{n!}, \, n = 0, 1, \ldots$$

essendo $f(z) = 1/(1+z)$. Osservato che $f^{(n)}(z) = (-1)^n n!(1+z)^{-(n+1)}$, $a_n = \frac{(-1)^n}{(1-2i)^{n+1}}$. Di conseguenza

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1-2i)^{n+1}} (z+2i)^n.$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto ricordando lo sviluppo di $1/(1+z)$, che rappresenta lo sviluppo di una serie geometrica con termine iniziale 1 e ragione $-z$. per cui $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$. Basta infatti adottare il seguente semplicissimo artifizio:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} &= \frac{1}{1+z+2i-2i} = \frac{1}{(z+2i)+(1-2i)} = \frac{1}{1-2i} \frac{1}{1+\frac{z+2i}{1-2i}} = \\ &= \frac{1}{1-2i} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{z+2i}{1-2i}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1-2i)^{n+1}} (z+2i)^n. \end{aligned}$$

Esercizio 1.36 *Sviluppare $\sin(z)$ in serie di Taylor con punto iniziale $z_0 = \pi/4$.*

Da

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \sin\left[\left(z-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right] = \sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} + \cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\right], \end{aligned}$$

ricordando gli sviluppi in serie di Taylor di $\sin(x)$ e $\cos(x)$, con $x = z - \pi/4$, si ottiene

$$\begin{aligned} sin(z) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right) + \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right)\right\} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right\} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 + \left(z-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} - \frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \right. \\ &\left. + \frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} + \frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^5}{5!} + \ldots\right\}. \end{aligned}$$

1.7.1 Funzioni analitiche e serie di Laurent

Per serie di Laurent, centrata in z_0, si intende una serie del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n. \tag{1.4}$$

Si tratta chiaramente di una generalizzazione della serie di potenze, in quanto si riduce ad una serie di potenze nel caso in cui $a_n = 0$ per $n = -1, -2, \ldots$.

Teorema 1.22 (Teorema di Laurent) *Sia f una funzione analitica in un anello centrato in z_0, ossia in un dominio $\mathcal{D}$ delimitato da due cerchi concentrici $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ ambedue con centro z_0 e raggi r_1 ed r_2 rispettivamente, con $r_1 > r_2$. Sotto tali ipotesi, qualunque sia z interno all'anello $\mathcal{D}$, vale il seguente sviluppo in serie:*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad , \textit{dove} \\ a_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \quad , n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned} \tag{1.5}$$

e $\mathcal{C}$ è un cerchio con centro z_0 e raggio $r_2 < r < r_1$.

La dimostrazione si basa sulla formula integrale di Cauchy, relativa all'anello $\mathcal{D}$ delimitato della frontiera $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

e sullo sviluppo di $\frac{1}{w-z}$ in opportune potenze che dipendono da $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ rispettivamente.

Nel caso tutti gli a_n, $n = -1, -2, \ldots$ risultino nulli la serie di Laurent è più propriamente una serie di Taylor. Si dice inoltre che la f ha un polo semplice in z_0, se $a_{-1} \neq 0$ e tutti gli a_n con $n = -2, -3, \ldots$ sono nulli. Il polo è doppio se $a_{-2} \neq 0$ e $a_n = 0$ per $n = -3, -4, \ldots$. Più in generale, si dice che f ha un polo di ordine p se $a_{-p} \neq 0$ e $a_n = 0$ per $n = -(p+1), -(p+2), \ldots$. Si dice infine che f ha una singolarità essenziale se, qualunque sia l'interno negativo p, esiste un $n > p$ con $a_n \neq 0$.
Dalla precedente osservazione segue immediatamente che z_0 è un polo di ordine p, se esiste un numero naturale p (necessariamente unico) tale che $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^p f(z) = l \neq 0$. Se invece per ogni numero naturale p si ha $\lim\limits_{z\to z_0}|(z-z_0)^p f(z)| = \infty$, la singolarità è definita essenziale. La singolarità è invece eliminabile se $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = l \in \mathbb{C}$.

Esercizio 1.37 *Classificare le singolarità delle seguenti funzioni, determinando altresì il raggio di convergenza delle relative serie:*

1. $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$, $z = -2$;

2. $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$, $z = 1$;

3. $f(z) = \frac{z-\sin(z)}{z^3}$, $z = 0$;

4. $f(z) = (z-3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$, $z = -2$;

(1) $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$, $z = -2$.
Il polo (singolarità) da classificare è $z = -2$, per cui lo sviluppo deve essere centrato in $z = -2$. Posto $u = z + 2$, $f(z)$ diventa

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(z+1)(z+2)} = \phi(u) = \frac{u-2}{(u-1)u} = \frac{2-u}{u}\frac{1}{1-u} = \\ &= \frac{2-u}{u}(1+u+u^2+\dots) = \frac{2}{u} + 1 + u + u^2 + \dots = \\ &= \frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \dots \end{aligned}$$

Di conseguenza $z = -2$ è un polo semplice (singolarità di ordine 1). Questo risultato poteva essere stabilito immediatamente, in quanto $\lim_{z\to-2}(z+2)f(z) = 2$. La serie converge per $|z+2| < 1$, $z \neq -2$, per cui il raggio di convergenza è $R = 1$. Procedendo in modo del tutto analogo si può dimostrare che anche $z = -1$ è un polo semplice.

(2) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$, $z = 1$.
Posto $u = z - 1$, si ottiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} = \phi(u) = \frac{e^{2(1+u)}}{u^2} = \frac{e^2}{u^2}e^{2u} = \\ &= \frac{e^2}{u^2}\left(1 + 2u + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^3}{3!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \dots\right) = \\ &= \frac{e^2}{u^2} + \frac{2e^2}{u} + 2e^2 + 4e^2\left(\frac{2u}{3!} + \frac{(2u)^2}{4!} + \frac{(2u)^3}{5!} + \dots\right) = \\ &= \frac{e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + 2e^2 + 4e^2\left(\frac{2}{3!}(z-1) + \frac{2^2}{4!}(z-1)^2 + \right. \\ &\left. + \frac{2^3}{5!}(z-1)^3 + \dots + \frac{2^n}{(n+2)!}(z-1)^n + \dots\right) \end{aligned}$$

La singolarità è del secondo ordine e, per il criterio del rapporto, la serie è convergente per ogni $z \neq 1$. L'ordine della singolarità è immediatamente deducibile, dato che $\lim_{z\to1}(z-1)^2 f(z) = e^2$.

(3) $f(z) = \frac{z-\sin(z)}{z^3}$, $z = 0$.
Ricordando lo sviluppo in serie di Taylor di $\sin(z)$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z-\sin(z)}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left\{z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\right)\right\} = \\ &= \frac{1}{z^3}\left\{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots\right\} = \\ &= \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} + \dots + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n-2} + \dots. \end{aligned}$$

La serie è ovunque convergente, per cui si dice che la $f(z)$ ha in $z = 0$ una singolarità eliminabile, come risulta anche dal fatto che $\lim_{z\to0} f(z) = \frac{1}{6}$.

(4) $f(z) = (z-3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$, $z = -2$.
Posto $u = z + 2$,

$$\begin{aligned}
f(z) = (z-3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right) &= f(z) = (u-5)\sin\left(\frac{1}{u}\right) = \\
&= (u-5)\left\{\frac{1}{u} - \frac{1}{3!u^3} + \frac{1}{5!u^5} + \dots\right\} = \\
&= 1 - \frac{5}{u} - \frac{1}{3!u^2} + \frac{5}{3!u^3} + \frac{1}{5!u^4} - \frac{5}{5!u^5} + \dots = \\
&= 1 - 5(z+2)^{-1} - \frac{1}{3!}(z+2)^{-2} + \frac{5}{3!}(z+2)^{-3} + \\
&+ \frac{1}{5!}(z+2)^{-4} - \frac{1}{5!}(z+2)^{-5} + \dots
\end{aligned}$$

La funzione ha pertanto una singolarità essenziale in $z = -2$.

Esercizio 1.38 *Determinare e classificare le singolarità delle funzioni:*

1. $\frac{1}{2\sin(z)-1}$;
2. $\frac{z}{e^z-1}$;
3. $\frac{z}{e^{1/z}-1}$;
4. $e^{z/(z-2)}$;
5. $\tan(z)$, *in un intorno di* $z = \frac{\pi}{2}$.

L'osservazione di partenza è che il rapporto di funzioni analitiche è una funzione analitica, tranne nei punti in cui si azzera il denominatore.

(1) $2\sin(z) - 1 = 0$ *per* $z = z'_k = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ *e* $z = z''_k = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$. *Il fatto che* $2\sin(z) - 1 = 0$ *abbia uno zero semplice sia in* $z_k = z'_k$ *che in* $z_k = z''_k$ *fa ipotizzare che i poli siano tutti semplici. Per poterlo affermare si deve dimostrare che nella serie di Laurent, centrata in* z_k, $a_{-1} \neq 0$ *e* $a_{-n} = 0$ *per* $n = 2, 3, \dots$.

Che $a_{-n} = 0$ *per* $n = 2, 3, \dots$ *è immediato, dato che*

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_k}(w - z_k)^{n-1}\frac{1}{2\sin(w)-1}\,dw \quad \text{, con } n = 2, 3, \dots$$

e la funzione integranda è analitica in ogni cerchio $\mathcal{C}_k$ *centrato in* z_k.

Per il calcolo di a_{-1}, *basta osservare che*

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_k}\frac{1}{2\sin(w)-1}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}_k}\frac{1}{w-z_k}\frac{w-z_k}{2\sin(w)-1}\,dw = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

a seconda che sia $z_k = z'_k$ *oppure* $z_k = z''_k$, *in quanto:*

$$\lim_{w\to z_k}\frac{w-z_k}{2\sin(w)-1} = \frac{1}{2\cos(z_k)} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Che i poli siano tutti semplici poteva essere affermato subito, dato che $\lim_{w\to z_k}(w - z_k)f(w) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) $e^z = 1$ *per* $e^{z_n} = e^{i\theta_k}$ *con* $\theta_k = 2k\pi$, *e dunque per* $z_k = 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. *Tra questi,* $z = 0$ *è una singolarità eliminabile in quanto* $\lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1$. *I punti* $z_k = 2k\pi i$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ *sono invece poli semplici, come può essere verificato, osservando che* $\lim_{z\to z_k} (z - z_k) f(z) = z_k \neq 0$.

(3) $e^{1/z} - 1 = 0$ *per* $\frac{1}{z_k} = 2k\pi i$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, *per cui* $z_k = -\frac{i}{2k\pi}$, *rappresenta un polo per ogni* $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, *e i poli sono tutti semplici. In* $z = 0$ *si ha una singolarità essenziale, e in* z_∞ *un polo del secondo ordine. Per* z_∞, *basta osservare che* $e^{1/z} - 1 = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots$, *ossia che l'infinitesimo principale di* $\frac{e^{1/z}-1}{z} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{3!z^4} + \ldots$ *è di ordine 2.*

(4) Ha una singolarità in $z = 2$. *Il suo sviluppo, centrato in 2, è facilmente ottenibile da quello di* $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$, *dopo aver osservato che*

$$
\begin{aligned}
e^{z/(z-2)} &= e^{\frac{(z-2)+2}{z-2}} = e e^{2/(z-2)} = \\
&= e\left\{1 + \frac{2}{z-2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{z-2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{2}{z-2}\right)^3 + \cdots\right\}.
\end{aligned}
$$

$z = 2$ *è pertanto una singolarità essenziale e la serie converge per ogni* $|z - 2| > 2$.

(5) $z = \pi/2$ *rappresenta un polo semplice, in quanto nello sviluppo di Laurent* $a_{-n} = 0$ *per* $n \geq 2$ *e*

$$
a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \tan(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z - \frac{\pi}{2}}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)\tan(z)\, dz = -1.
$$

Il risultato è una conseguenza immediata del fatto che $\lim_{z\to\frac{\pi}{2}} (z - \pi/2)\tan(z) = -1$.

Esempio 1.2 *La funzione di Bessel* $\mathcal{J}_n(z)$, *per ogni intero* n, *può essere definita mediante l'equazione*

$$
e^{\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_n(z) w^n \tag{1.6}
$$

nella quale il primo membro è la "funzione generatrice" e il secondo membro il suo sviluppo di Laurent con centro in $w = 0$. *Di conseguenza, per la formula integrale sui coefficienti di Laurent,*

$$
\mathcal{J}_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)}}{w^{n+1}}\, dw \ \ , n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.7}
$$

dove $\mathcal{C}$ *è un cerchio con centro l'origine. Assumendo, per comodità,* $\mathcal{C}$ *di raggio unitario, ossia ponendo*

$w = e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, *risulta* ($dw = ie^{i\theta}\,d\theta$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_n(z) &= \frac{i}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{z}{2}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)}e^{-in\theta}\,d\theta = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\sin(\theta)}(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))\,d\theta = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(z\sin(\theta)) + i\sin(z\sin(\theta)))(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))\,d\theta = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{[\cos(z\sin(\theta))\cos(n\theta) + \sin(z\sin(\theta))\sin(n\theta)] + \\
&+ i\,[\sin(z\sin(\theta))\cos(n\theta) - \cos(z\sin(\theta))\sin(n\theta)]\}\;d\theta = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(z\sin(\theta) - n\theta) + i\sin(z\sin(\theta) - n\theta)\}\;d\theta = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(z\sin(\theta) - n\theta)\,d\theta
\end{aligned}$$

perché il secondo integrale è nullo, trattandosi dell'integrale su di un intervallo di amipezza 2π*, di una funzione dispari e periodica di periodo* 2π*.*

Esercizio 1.39 *Sviluppare in serie di Laurent le seguenti funzioni:*

1. $e^{1/(z+i)}$*, con centro in* $z_0 = -i$*;*
2. $\frac{1}{z^2+1}$*, con centro in* $z_0 = i$*;*
3. $\frac{1}{z}\sin(4z)$*, con centro in* $z_0 = 0$*.*

(1) La funzione è analitica in ogni anello centrato in $-i$ $(0 < |z+i| \leq +\infty)$*. Pertanto ricordando che* $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$*, la funzione* $e^{1/(z+i)}$ *può essere così sviluppata:*

$$e^{\frac{1}{z+i}} = 1 + \frac{1}{z+i} + \frac{1}{2!(z+i)^2} + \cdots + +\frac{1}{n!(z+i)^n} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(z+i)^{-n}$$

Il polo rappresenta pertanto una singolarità essenziale.

(2) Essendo

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) = -\frac{i}{2}\frac{1}{z-i} + \frac{i}{2}\frac{1}{z+i}$$

con $\frac{1}{z+i}$ *analitica in* $z = i$*. Basta pertanto sviluppare* $\frac{i}{2}\frac{1}{z+i}$ *in serie di Taylor centrata in* i*. Essendo* $\frac{1}{z+i} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-i)^n$ *con* $a_n = \frac{f^{(n)}(i)}{n!}$ *e* $f(z) = \frac{1}{z+i}$*, è sufficiente osservare che* $f^n(z) = (-1)^n n!(z+i)^{-n}$*, da cui* $a_n = (-1)^n(2i)^{-n}$*, e pertanto:*

$$\frac{1}{z^2+1} = -\frac{i}{2}\frac{1}{z-i} + \frac{i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{2i}\right)^n.$$

(3) La funzione ha una singolarità eliminabile in $z = 0$. Il suo sviluppo è immediatamente ottenibile da quello di $\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ *. Risulta infatti:*

$$\begin{aligned}\frac{\sin(4z)}{z} &= \frac{1}{z}\left\{4z - \frac{(4z)^3}{3!} + \frac{(4z)^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{(4z)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right\} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{4^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n}.\end{aligned}$$

1.8 Residui e teorema dei residui

Sia f una funzione analitica in un cerchio $\mathcal{C}$ privato del suo centro z_0. La f è allora sviluppabile in serie di Laurent con centro a, ossia è possibile scrivere

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \quad , n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Per $n = -1$,

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(z)\, dz,$$

risultato formalmente ottenibile dallo sviluppo della f, integrando termine a termine e ricordando che

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z - z_0)^k} = \begin{cases} 2\pi i & \text{, per } k = 1; \\ 0 & \text{, per qualsiasi } k \text{ intero diverso da } 1. \end{cases}$$

Definizione 1.1 *Il coefficiente a_{-1} viene definito il* residuo *della funzione f in $z = z_0$ (simbolicamente,* $\operatorname{Res} f(z_0)$ *oppure talvolta* $\operatorname{Res}_{z_0}(f)$*), dato che a_{-1} è l'unico coefficiente della serie che non si annulla nella integrazione della f sulla circonferenza.*

Il suo calcolo è relativamente semplice, se è nota la molteplicità del polo in z_0. Se il polo è semplice, per la formula integrale di Cauchy il valore di a_{-1} può essere calcolato come segue:

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \tag{1.8}$$

Nel caso sia multiplo di ordine m, può essere utilizzata la formula seguente:

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z)\right]. \tag{1.9}$$

La seconda formula include la prima, dato che, per convenzione, $0! = 1$. Per la dimostrazione basta ricordare che, se $z = z_0$ è un polo di ordine m, tutti i coefficienti della serie di Laurent a_{-n} con $n > m$ sono nulli. Sotto tale ipotesi la serie di Laurent è del tipo

$$\begin{aligned}f(z) = a_{-m} &\frac{1}{(z - z_0)^m} + a_{-m+1} \frac{1}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + a_{-1} \frac{1}{z - z_0} + a_0 + \\ &+ a_1 (z - z_0) + \cdots + a_n (z - z_0)^n + \ldots,\end{aligned}$$

da cui, moltiplicando per $(z-z_0)^m$ primo e secondo membro, risulta:

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1}a_0(z-z_0)^m + \\ + a_1(z-z_0)^{m+1} + \cdots + a_n(z-z_0)^{n+m} + \ldots +$$

Di conseguenza, derivando $m-1$ volte, termine a termine e passando al limite per $z \to z_0$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] = (m-1)!\, a_{-1}$$

e dunque la formula indicata è esatta.

Esercizio 1.40 *Calcolare i residui nei poli delle seguenti funzioni:*

1. $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$;
2. $f(z) = \frac{z(z-2)}{(z+1)^2(z^2+4)}$;
3. $f(z) = \frac{1}{\sin^2(z)}$.

(1) I poli sono $z=1$ (semplice) e $z=-1$ (doppio).

Residuo in $z=1$,

$$a_{-1} = \lim_{z\to 1}\left\{(z-1)\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right\} = \frac{1}{4}$$

Residuo in $z=-1$,

$$a_{-1} = \lim_{z\to -1}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{(z+1)^2\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right\} = \lim_{z\to -1}\left\{-\frac{1}{(z-1)^2}\right\} = -\frac{1}{4}.$$

(2) I poli sono $z=-1$ (doppio) e $z=\pm 2i$ (ambedue semplici).

Residuo in $z=-1$,

$$a_{-1} = \lim_{z\to -1}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{(z+1)^2\frac{z(z-2)}{(z+1)^2(z^2+4)}\right\} == \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left\{\frac{z(z-2)}{z^2+4}\right\} = -\frac{14}{25}.$$

Residuo in $z=2i$,

$$a_{-1} = \lim_{z\to 2i}\left\{(z-2i)\frac{z(z-2)}{(z+1)^2(z+2i)(z-2i)}\right\} == \lim_{z\to 2i}\frac{z(z-2)}{(z+1)^2(z+2i)} = \frac{7+i}{25}.$$

Residuo in $z=-2i$,

$$a_{-1} = \lim_{z\to -2i}\left\{(z+2i)\frac{z(z-2)}{(z+1)^2(z+2i)(z-2i)}\right\} == \lim_{z\to -2i}\frac{z(z-2)}{(z+1)^2(z-2i)} = \frac{7-i}{25}.$$

(3) I poli sono $z_k = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Essi costituiscono una infinità numerabile di poli doppi e tutti isolati.

Residuo in $z_k = k\pi$,

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \lim_{z \to k\pi} \frac{d}{dz} \left\{ (z-k\pi)^2 \frac{1}{\sin^2(z)} \right\} = \\ &= 2 \lim_{z \to k\pi} \frac{(z-k\pi)\sin(z) - (z-k\pi)^2 \cos(z)}{\sin^3(z)} = \\ &= 2 \lim_{z \to k\pi} \frac{z-k\pi}{\sin(z)} \lim_{z \to k\pi} \frac{\sin(z) - (z-k\pi)\cos(z)}{\sin^2(z)} = 2(-1)^k \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Teorema 1.23 (Teorema dei residui) *Sia f una funzione analitica in un dominio $\mathcal{D}$ esclusi i punti $z_1, z_2, \ldots, z_m$, in ciascuno dei quali presenta una singolarità. Indicata allora con $\mathcal{C}$ una curva chiusa regolare contenente al suo interno $z_1, z_2, \ldots, z_m$, vale il seguente risultato:*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{m} (\mathrm{Res}\, f)(z_j). \tag{1.10}$$

In altri termini, l'integrale della f su $\mathcal{C}$ è uguale a $2\pi i$ per la somma dei residui della f in $\mathcal{C}$.

Dimostrazione. Siano $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_m$ m cerchi contenuti in $\mathcal{C}$ che non si intersecano, con la proprietà che il cerchio $\mathcal{C}_i$ contiene il polo z_i, $i = 1, \ldots, m$, e solo quello. Allora, per il teorema di deformazione del contorno sulle funzioni analitiche

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = \oint_{\mathcal{C}_1} f(z)\, dz + \oint_{\mathcal{C}_2} f(z)\, dz + \cdots + \oint_{\mathcal{C}_m} f(z)\, dz$$

La conseguenza è allora immediata, dato che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_i} f(z)\, dz = (\mathrm{Res}\, f)(z_i).$$

□

Esercizio 1.41 *Calcolare i seguenti integrali:*

1. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)}\, dz$, *essendo $\mathcal{C}$ la semicirconferenza di centro l'origine e raggio 2;*
2. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{\sin(z)}{z^2(z^2+4)}\, dz$, *essendo $\mathcal{C}$ una curva regolare che racchiude $z = 0, \pm 2i$;*
3. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos(z)}{ze^z}\, dz$, *essendo $\mathcal{C}$ una curva regolare che include $z = 0$.*

(1) I poli, tutti interni a $\mathcal{C}$, sono $z = 0$ e $z = -1 \pm i$, dei quali il primo è doppio e gli altri due sono semplici.

Residuo in $z = 0$.

$$(\mathrm{Res}\, f)(0) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left[\frac{e^z}{z^2+2z+2} \right] = 0.$$

Residuo in $z = -1 + i$.

$$(\operatorname{Res} f)(-1+i) = \lim_{z\to -1+i} \frac{e^z}{z^2(z+1+i)} = \frac{1}{4}e^{-1+i} = \frac{1}{4e}(\cos(1) + i\sin(1)).$$

Residuo in $z = -1 - i$.

$$(\operatorname{Res} f)(-1-i) = \lim_{z\to -1-i} \frac{e^z}{z^2(z+1-i)} = \frac{1}{4}e^{-1-i} = \frac{1}{4e}(\cos(1) - i\sin(1)).$$

Di conseguenza, per il teorema dei residui,

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^2(z^2+2z+2)}\,dz =$$

$$= 2\pi i\left[\frac{1}{4e}(\cos(1)+i\sin(1)) + \frac{1}{4e}(\cos(1)-i\sin(1))\right] = i\frac{\pi}{2e}\cos(1).$$

(2) Residuo in $z = 0$: il polo è semplice, in quanto $\lim_{z\to 0}\frac{\sin(z)}{z} = 1$. Pertanto

$$(\operatorname{Res} f)(0) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z(z^2+4)} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{(z^2+4)} = \frac{1}{4}.$$

Residuo in $z = \pm 2i$: i poli sono ambedue semplici, per cui

$$(\operatorname{Res} f)(2i) = \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{\sin(z)}{z^2(z+2i)(z-2i)} = \frac{i}{16}\sin(2i);$$

$$(\operatorname{Res} f)(-2i) = \lim_{z\to -2i}(z+2i)\frac{\sin(z)}{z^2(z+2i)(z-2i)} = \frac{i}{16}\sin(2i).$$

Di conseguenza

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\sin(z)}{z^2(z^2+4)}\,dz = i\frac{\pi}{4}(2 + i\sin(2i)) = \frac{\pi}{4}(2i - \sin(2i)).$$

(3) Il polo $z = 0$ è semplice, per cui, essendo

$$(\operatorname{Res} f)(0) = \lim_{z\to 0}\frac{\cos(z)}{e^z} = 1,$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\cos(z)}{ze^z}\,dz = 2\pi i.$$

1.9 Teorema dei residui e calcolo di integrali

1.9.1 Integrali del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

La prima classe esaminata è quella degli integrali del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{1.11}$$

dove la $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, è analitica in tutti i punti del piano ad eccezione di un numero finito di punti $z_1, z_2, \ldots, z_n$, non appartenenti alla retta reale, in ciascuno dei quali la f possiede un polo semplice o multiplo.

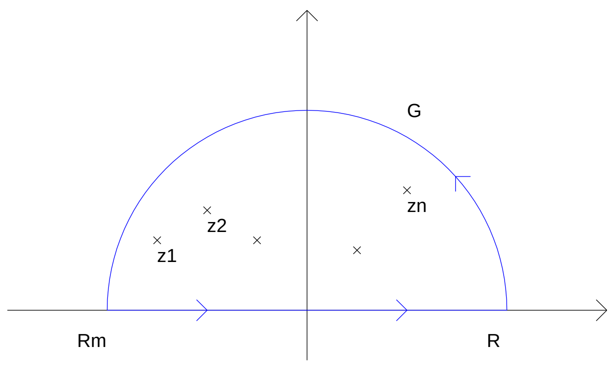


Figura 1.18:

Teorema 1.24 *Sia $\mathcal{C}$ un percorso formato dal segmento di retta $-R, R$ e dalla semicirconferenza Γ con centro l'origine, raggio R e orientata in senso antiorario, con R abbastanza grande da far sì che tutti i poli $z_1, z_2, \dots, z_n$ risultino interni al dominio delimitato da $\mathcal{C}$ (figura 1.18). Supponiamo ora che per ogni $z \in \Gamma$ risulti $|f(z)| \leq \frac{L}{R^k}$, con L numero positivo qualunque e $k > 1$. Sotto tale ipotesi*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} (\operatorname{Res} f)(z_j). \tag{1.12}$$

Per la dimostrazione basta osservare che, per il teorema dei residui,

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} (\operatorname{Res} f)(z_j)$$

e che

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)\,dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)|\,dz \leq \frac{L}{R^k} \int_{\Gamma} dz = \frac{\pi L}{R^{k-1}}$$

per cui

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0 \text{ , dato che } k > 1.$$

Esercizio 1.42 *Calcolare i seguenti integrali:*

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx$;

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(2x)}{x^4+16}\,dx$;

3. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx$.

(1) $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$ è analitica nel piano complesso ad eccezione dei quattro punti $\pm i$, $-1 \pm i$. Considero il contorno $\mathcal{C}$ formato dal segmento tra $-R$ e R, e la semicirconferenza Γ di centro l'origine

e raggio R sufficientemente grande da includere i due poli i e $-1+i$. In tal caso

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx + \int_{\Gamma} f(z)\,dz =$$
$$= 2\pi i[(\mathrm{Res}\, f)(i) + (\mathrm{Res}\, f)(-1+i)] =$$
$$= 2\pi i\left(\frac{9i-12}{100} + \frac{3-4i}{25}\right) = \frac{7}{50}\pi$$

Pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx = \frac{7}{50}\pi,$$

in quanto l'integrale su Γ è nullo, essendo $\left|\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}\right| = O\left(\frac{1}{R^4}\right)$, ossia è un infinitesimo di quarto ordine rispetto ad $1/R$.

(2) $\frac{z\sin(2z)}{z^4+16}$ è analitica nel piano tranne che in $\sqrt{2}(1\pm i)$, $\sqrt{2}(-1\pm i)$ dove ha dei poli semplici. Inoltre sulla semicirconferenza Γ di raggio R, $|f(z)| = O\left(\frac{1}{R^3}\right)$. Pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(2x)}{x^4+16}\,dx = 2\pi i[(\mathrm{Res}\, f)(\sqrt{2}(1+i)) + (\mathrm{Res}\, f)(\sqrt{2}(-1+i))] =$$
$$= \frac{\pi}{4}e^{-2\sqrt{2}}\sin(2\sqrt{2})$$

(3) $\frac{1}{z^6+1}$ è analitica tranne che in $z = e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{3}{6}\pi}, e^{i\frac{5}{6}\pi}, e^{i\frac{7}{6}\pi}, e^{i\frac{9}{6}\pi}, e^{i\frac{11}{6}\pi}$, ciascuno dei quali è un polo semplice. La prima osservazione è che essendo $f(x)$ una funzione pari [$f(-x) = f(x)$],

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx$$

e dunque il risultato è noto una volta calcolato l'integrale della $f(x)$ sulla retta. La seconda osservazione è che, indicato con $\mathcal{C}$ il percorso formato dal segmento di retta compreso tra $-R$ ed R e con Γ la semicirconferenza con centro l'origine e raggio R includente i poli del semipiano superiore,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma} \frac{1}{z^6+1}\,dz = 0$$

dato che $|f(z)| \le \frac{1}{R^6}$ su Γ. Di conseguenza

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{2}2\pi i\left[(\mathrm{Res}\, f)(e^{i\frac{\pi}{6}}) + (\mathrm{Res}\, f)(e^{i\frac{3}{6}\pi}) + (\mathrm{Res}\, f)(e^{i\frac{5}{6}\pi})\right] = \frac{\pi}{3}$$

in quanto (per la regola di de L'Hospital)

$$(\mathrm{Res}\, f)(e^{i\frac{\pi}{6}}) = \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{6}}} \left(z - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\frac{1}{z^6+1} = \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{6}}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{-i\frac{5}{6}\pi}$$
$$(\mathrm{Res}\, f)(e^{i\frac{3}{6}\pi}) = \lim_{z\to e^{i\frac{3}{6}\pi}} \left(z - e^{i\frac{3}{6}\pi}\right)\frac{1}{z^6+1} = \lim_{z\to e^{i\frac{3}{6}\pi}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{-i\frac{5}{2}\pi}$$
$$(\mathrm{Res}\, f)(e^{i\frac{5}{6}\pi}) = \lim_{z\to e^{i\frac{5}{6}\pi}} \left(z - e^{i\frac{5}{6}\pi}\right)\frac{1}{z^6+1} = \lim_{z\to e^{i\frac{5}{6}\pi}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{-i\frac{25}{6}\pi}$$

Supponiamo ora che la $f(z)$, pur soddisfacendo le ipotesi del teorema 1.24, presenti dei poli sull'asse reale. In tal caso in calcolo dell'integrale viene effettuato mediante la formula seguente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{Res}\, f)(z'_j) + \pi i\sum_{k=1}^{m}(\mathrm{Res}\, f)(z''_k)$$

essendo $\{z'_j\}$ i poli interni e $\{z''_k\}$ i poli sull'asse reale.

1.9.2 Integrali del tipo $\int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta))\, d\theta$

Nel caso in cui si abbia a che fare con un integrale del tipo

$$\int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta))\, d\theta \tag{1.13}$$

dove f è una funzione razionale (rapporto di due polinomi) il procedimento più usuale consiste nel ricondursi all'integrazione su un cerchio unitario $\mathcal{C}$ di una funzione ivi analitica, tranne in un numero finito di punti, in modo da poter far ricorso al teorema dei residui. Di solito si raggiunge lo scopo mediante la sostituzione

$$z = e^{i\theta} \quad , 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

ovverosia

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}; \\ \sin(\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}; \\ dz &= ie^{i\theta} d\theta \quad \rightarrow \quad d\theta = -iz^{-1} dz \end{aligned} \tag{1.14}$$

Esercizio 1.43 *Calcolare i seguenti integrali:*

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{1 + \frac{1}{4}\cos(\theta)}\, d\theta;$
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - 2\cos(\theta) + \sin(\theta)}\, d\theta;$
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos(\theta)}\, d\theta;$

(1)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{1 + \frac{1}{4}\cos(\theta)}\, d\theta = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\frac{z+z^{-1}}{2}}{1 + \frac{z+z^{-1}}{8}} (-iz^{-1}) dz = -4i \oint_{\mathcal{C}} \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 8z + 1)}\, dz$$

dove $\mathcal{C}$ è il cerchio unitario $|z| = 1$ orientato in senso antiorario. La funzione integranda $f(z)$ è analitica in tutto il piano, tranne che in $z = 0$, $-4 + \sqrt{15}$ e $-4 - \sqrt{15}$. Di questi $z = 0$ e $-4 + \sqrt{15}$ sono interni a $\mathcal{C}$ e $-4 - \sqrt{15}$ è esterno. Pertanto

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta)}{1 + \frac{1}{4}\cos(\theta)}\, d\theta &= -4i(2\pi i) \left[(\operatorname{Res} f)(0) + (\operatorname{Res} f)(-4 + \sqrt{15}) \right] = \\ &= 2\pi \frac{4\sqrt{15} - 16}{\sqrt{15}} \end{aligned}$$

in quanto

$$(\operatorname{Res} f)(0) = \lim_{z \to 0} (-4i) \frac{z^2 + 1}{z^2 + 8z + 1} = -4i$$

$$(\operatorname{Res} f)(-4 + \sqrt{15}) = \lim_{z \to -4 + \sqrt{15}} (-4i) \frac{z^2 + 1}{z(z + 4 + \sqrt{15})} = \frac{16i}{\sqrt{15}}.$$

(2)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3-2\cos(\theta)+\sin(\theta)}\,d\theta = \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{3-(z+z^{-1})+\frac{z-z^{-1}}{2i}}(-iz^{-1})dz =$$
$$= \oint_{\mathcal{C}} \frac{2}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i}\,dz.$$

L'ultima trasformazione è stata ottenuta moltiplicando numeratore e denominatore per $2iz$. La $f(z)$ è ovunque analitica tranne in $z = 2-i$ e $(2-i)/5$, che sono poli semplici. Di questi solo $(2-i)/5$ è nel cerchio unitario e pertanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3-2\cos(\theta)+\sin(\theta)}\,d\theta = (2\pi i)(\mathrm{Res}\, f)\left(\frac{2-i}{5}\right) = \pi,$$

in quanto

$$(\mathrm{Res}\, f)\left(\frac{2-i}{5}\right) = \lim_{z\to\frac{2-i}{5}} \frac{2}{(1-2i)(z-(2-i))} = \frac{1}{2i}.$$

(3)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5-4\cos(\theta)}\,d\theta = \oint_{\mathcal{C}} \frac{\frac{z^3+z^{-3}}{2}}{5-2(z+z^{-1})}(-iz^{-1})dz =$$
$$= -\frac{1}{2i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{z^6+1}{z^3(z-2)(2z-1)}\,dz.$$

La $f(z)$ ha un polo semplice in $z = 2$ e $z = 1/2$ e uno triplo in $z = 0$, dei quali $z = 2$ è esterno al cerchio unitario. Pertanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5-4\cos(\theta)}\,d\theta = -\frac{1}{2i}(2\pi i)\left[(\mathrm{Res}\, f)(0) + (\mathrm{Res}\, f)\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{12},$$

in quanto

$$(\mathrm{Res}\, f)(0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left\{z^3 \frac{z^6+1}{z^3(z-2)(2z-1)}\right\} = \frac{21}{8};$$
$$(\mathrm{Res}\, f)\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{z\to 1/2}\left\{\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{z^6+1}{z^3(z-2)(2z-1)}\right\} = -\frac{65}{24}.$$

1.9.3 Integrali del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\{\cos(\alpha x), \sin(\alpha x)\}\,dx$

Si considerano adesso gli integrali del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x)\,dx \tag{1.15}$$

con α reale positivo. L'integrale è spesso calcolabile esattamente, nel caso esista una semicirconferenza Γ con centro l'origine e raggio R ($z = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$) nella quale risulti $|f(z)| \le \frac{L}{R^k}$, essendo $k > 0$ e L una costante indipendente da R. La semplificazione dipende dal fatto che, qualunque sia $\alpha > 0$,

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma e^{i\alpha z} f(z)\,dz = 0$$

Dimostrazione. Poiché Γ è definita dall'equazione $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$,

$$\int_\Gamma e^{i\alpha z} f(z)\, dz = \int_0^\pi e^{i\alpha Re^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta}\, d\theta =$$
$$= iR \int_0^\pi e^{-\alpha R\sin(\theta)} e^{i\alpha R\cos(\theta)} f(Re^{i\theta}) e^{i\theta}\, d\theta$$

da cui

$$\left|\int_\Gamma e^{i\alpha z} f(z)\, dz\right| \leq R\int_0^\pi e^{-\alpha R\sin(\theta)} \left|f(Re^{i\theta})\right| d\theta \leq \frac{L}{R^{k-1}}\int_0^\pi e^{-\alpha R\sin(\theta)}\, d\theta \leq$$
$$\leq \frac{2L}{R^{k-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\alpha R}{\pi}\theta}\, d\theta = \frac{\pi L}{\alpha R^k}\left(1 - e^{-\alpha R}\right).$$

dove nel penultimo passaggio si è utilizzata la relazione $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\sin(\theta)} d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\alpha R\sin(\theta)} d\theta$ e poi il fatto che $\sin(\theta) \geq \frac{2}{\pi}\theta$ per $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (Fig. 1.19). Il risultato è dunque esatto dato che l'ultimo maggiorante converge a zero per $R \to +\infty$. □

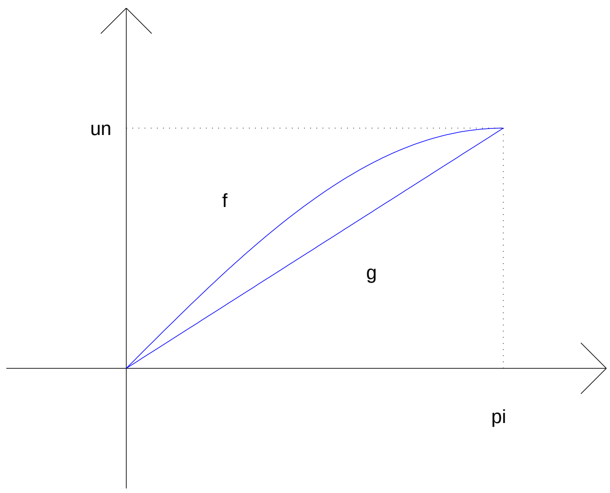


Figura 1.19:

Osservazione 1.1 $\sin(\theta) \geq \frac{2}{\pi}\theta$ *per* $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, *in quanto* $y = \frac{2}{\pi}\theta$ *rappresenta il segmento di retta che unice il punto* $(0, 0)$ *con* $(\frac{\pi}{2}, 1)$. *In altre parole essa rappresenta la corda relativa all'arco determinato dalla funzione* $\sin(\theta)$ *per* $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, *come mostrato in figura 1.19.*

Nel caso siano valide le suddette ipotesi, a ciascuno degli integrali in esame viene associato un integrale del tipo

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) e^{i\alpha z}\, dz \tag{1.16}$$

ottenuto con la semplice sostituzione di $f(x)$ con $f(z)$e di $\cos(\alpha x)$ o $\sin(\alpha x)$ con $e^{i\alpha z}$, essendo $\mathcal{C}$ il percorso da $-R$ a R, seguito dalla semicirconferenza Γ di equazione $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Esercizio 1.44 *Calcolare i seguenti integrali:*

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\,dx$;

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(\sqrt{3}x)}{x^2+16}\,dx$.

(1) All'integrale si associa l'integrale in campo complesso

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)e^{i\pi z}\,dz, \qquad f(z)=\frac{z}{z^2+2z+5}$$

e si osserva che $f(z)$ soddisfa l'ipotesi richiesta $|f(z)|\le \frac{L}{R^k}$ con $k>0$, in quanto $|f(z)|\to 0$ per $|z|\to+\infty$ come $\frac{1}{|z|}$ (in breve f è un $O\left(\frac{1}{|z|}\right)$). Inoltre $f(z)$ è ovunque analitica nel piano, ad eccezione dei punti $-1\pm 2i$, in ciascuno dei quali possiede un polo semplice. Poiché soltanto $-1+2i$ è interno al percorso $\mathcal{C}$, per il teorema dei residui (tenuto conto del fatto che $\int_\Gamma f(z)e^{i\pi z}\,dz\to 0$ per $R\to+\infty$) possiamo affermare che

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}\,dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z\cos(\pi z)}{z^2+2z+5}\,dz+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z\sin(\pi z)}{z^2+2z+5}\,dz=$$
$$=2\pi i(\operatorname{Res} f)(-1+2i)=\frac{\pi}{2}(1-2i)e^{-2\pi},$$

da cui uguagliando parti reale ed immaginaria

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos(\pi x)}{x^2+2x+5}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-2\pi}\quad e\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\,dx=-\pi e^{-2\pi}.$$

(2) Osservato che (su Γ) $\left|\frac{z}{z^2+16}\right|=O\left(\frac{1}{R}\right)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ze^{i\sqrt{3}z}}{z^2+16}\,dz=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\cos(\sqrt{3}z)}{z^2+16}\,dz+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z\sin(\sqrt{3}z)}{z^2+16}\,dz=$$
$$=2\pi i\left(\operatorname{Res}\frac{ze^{i\sqrt{3}z}}{z^2+16}\right)(4i)=\pi i e^{-4\sqrt{3}}.$$

Di conseguenza

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos(\sqrt{3}x)}{x^2+16}\,dx=0\quad e\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin(\sqrt{3}x)}{x^2+16}\,dx=\pi e^{-4\sqrt{3}}.$$

1.9.4 Valore principale di Cauchy di integrali impropri

Sia $f(x)$ una funzione continua in $a\le x\le b$, tranne in un punto interno x_0 ($a<x_0<b$). Supponiamo inoltre che, in senso proprio, non esista l'integrale della f in $[a,b]$. Questo non esclude che esista il

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_a^{x_0-\epsilon} f(x)\,dx+\int_{x_0+\epsilon}^b f(x)\,dx\right].$$

Se tale limite esiste finito, il suo valore viene definito valore principale di cauchy dell'integrale.

Esempio 1.3 *In senso proprio non esiste l'integrale*

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^3}\,dx$$

in quanto per $x \to 0$ $\frac{1}{x^3}$ è un infinito di ordine 3. Il suo valore principale tuttavia esiste ed è zero, essendo

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{1}{x^3}\,dx+\int_{\epsilon}^{1}\frac{1}{x^3}\,dx\right]=\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^{-\epsilon}+\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{\epsilon}^{1}\right\}=$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\left\{-\frac{1}{2\epsilon^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\epsilon^2}\right\}=0$$

1.9.5 Integrali calcolabili mediante il teorema dei residui.

Esempio 1.4 *Calcolare*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

Prima di tutto osserviamo che la funzione integranda è pari, per cui, essendo

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,dx,$$

ci si può avvalere della tecnica descritta per per il calcolo di integrali del tipo $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin(x)\,dx$. A tale scopo dobbiamo considerare la funzione integranda e^{iz}/z la quale presenta un polo in $z=0$. Per questo motivo il precedente contorno $\mathcal{C}$ va sostituito con quello $\widehat{\mathcal{C}}$ indicato nella figura 1.20.

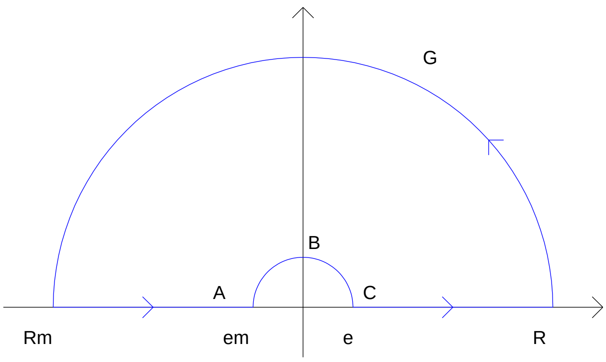


Figura 1.20:

Non essendoci punti singolari all'interno di $\widehat{\mathcal{C}}$

$$\oint_{\widehat{\mathcal{C}}}\frac{e^{iz}}{z}\,dz=\int_{-R}^{-\epsilon}\frac{e^{ix}}{x}\,dx+\int_{ABC}\frac{e^{iz}}{z}\,dz+\int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{ix}}{x}\,dx+\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{z}\,dz=0$$

da cui, osservato che $\int_{-R}^{-\epsilon}\frac{e^{ix}}{x}\,dx=-\int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{-ix}}{x}\,dx$,

$$\int_{ABC}\frac{e^{iz}}{z}\,dz+\int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}\,dx+\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{z}\,dz=0$$

e dunque

$$2i\int_{\epsilon}^{R}\frac{\sin(x)}{x}\,dx=-\int_{ABC}\frac{e^{iz}}{z}\,dz-\int_{\Gamma}\frac{e^{iz}}{z}\,dz.$$

Poiché, per quanto abbiamo già visto, l'integrale su Γ tende a zero per $R \to +\infty$, per conoscere il risultato basta calcolare il primo integrale a destra dell'uguale per $\epsilon \to 0$. Essendo in ABC, $z = \epsilon e^{i\theta}$ con $\pi \geq \theta \geq 0$.

$$-\int_{ABC} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = -\int_{\pi}^{0} \frac{e^{ie^{i\theta}}}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta}\, d\theta = i\int_0^{\pi} \left[\cos\left(\epsilon e^{i\theta}\right) + i\sin\left(\epsilon e^{i\theta}\right)\right] d\theta$$

e dunque

$$2i\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{ i\int_0^{\pi} \left[\cos\left(\epsilon e^{i\theta}\right) + i\sin\left(\epsilon e^{i\theta}\right)\right] d\theta \right\} = \pi i,$$

ossia

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Esempio 1.5 *Calcolare*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\, dx.$$

La funzione $\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$ è ovunque analitica, tranne in $z = \pm i$. Poiché $\ln(z^2+1) = \ln(z+i)+\ln(z-i)$ e i due poli sono uno nel semipiano superiore e uno in quello inferiore, è conveniente calcolare separatamente gli integrali di $\frac{1}{z^2+1}\ln(z+i)$ e di $\frac{1}{z^2+1}\ln(z-i)$. Per il calcolo del primo integrale consideriamo il contorno $\mathcal{C}$ formato dal segmento dell'asse reale compreso $-R$ e R e la semicirconferenza Γ di equazione $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. L'unico suo polo all'interno di $\mathcal{C}$ è i, nel quale il valore del residuo è

$$\lim_{z\to i}(z-i)\frac{\ln(z+i)}{(z+i)(z-i)} = \frac{\ln(2i)}{2i} = \frac{\ln(2)+\ln(i)}{2i} = \frac{\ln(2)+i\frac{\pi}{2}}{2i}$$

avendo assunto come valore del $\log(2i)$ il suo valore principale. Di conseguenza

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}\, dz = \int_{-R}^{0} \frac{\ln(x+i)}{x^2+1}\, dx + \int_0^{R} \frac{\ln(x+i)}{x^2+1}\, dx + \int_{\Gamma} \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}\, dz =$$
$$= \pi\left(\ln(2) + i\frac{\pi}{2}\right).$$

Per $R \to +\infty$ l'integrale su Γ tende a zero, per cui esso può essere ignorato. Infine, sostituendo z con $-z$ nell'inegrale tra $-R$ e 0,

$$\int_0^{R} \frac{\ln(i-x)}{x^2+1}\, dx + \int_0^{R} \frac{\ln(i+x)}{x^2+1}\, dx = \int_0^{R} \frac{\ln(i^2-x^2)}{x^2+1}\, dx =$$
$$= \int_0^{R} \frac{\ln(x^2+1)+\pi i}{x^2+1}\, dx = \int_0^{R} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\, dx + \pi i[\arctan(x)]_0^R =$$
$$= \pi\ln(2) + i\frac{\pi^2}{2}.$$

Da cui, ricordando che $\lim_{R\to+\infty}\arctan(R) = \pi/2$, segue che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\, dx = \pi\ln(2).$$

1.10 Inversione della trasformata di Laplace nel campo complesso

Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, la trasformata inversa $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ è esprimibile nel modo seguente:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{st} F(s) \mathrm{d}s, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

Tale formula, detta formula di inversione della trasformata di Laplace, è nota anche come formula integrale di Bromwich. L'integrazione, chiaramente nel campo complesso, deve essere effettuata lungo la retta $s = a$ del piano complesso, dove a è scelto in modo che tutte le eventuali singolarità di F (poli, singolarità essenziali, punti di diramazione) si trovino alla sinistra della retta. Questo significa che l'integrale della formula viene calcolato considerando un integrale di contorno del tipo

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \mathrm{e}^{st} F(s) \mathrm{d}s \tag{1.18}$$

dve C è il cosiddetto contorno di Bromwich (figura 1.21) formato dal segmento $\overline{AB}$ e dall'arco

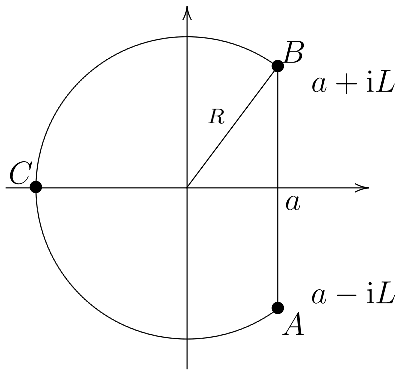


Figura 1.21: Contorno di Bromwich

$\overline{BCA}$ della circonferenza di centro l'origine e raggio R. Indicato con Γ l'arco $\overline{BCA}$, poichè $L = \sqrt{R^2 - a^2} \to \infty$ per $R \to \infty$, dalla (1.17) segue che

$$f(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{a-\mathrm{i}L}^{a+\mathrm{i}L} \mathrm{e}^{st} F(s) \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{R\to\infty} \left\{ \oint_C \mathrm{e}^{st} F(s) \mathrm{d}\, s - \oint_\Gamma \mathrm{e}^{st} F(s) \mathrm{d}s \right\} \tag{1.19}$$

Calcolo di $f(t)$ mediante il teorema dei residui Supponiamo ora che le uniche singolarità della F siano poli e che questi siano tutti situati alla sinistra della retta $s = a$. Supponiamo inoltre che, sotto tali ipotesi, l'integrale lungo Γ di $\mathrm{e}^{st} F(s)$ tenda a zero per $R \to \infty$. In questo caso, per il teorema dei residui, si puo affermare che

$$f(t) = \text{somma dei residui di } \mathrm{e}^{st} F(s) \quad \text{(calcolati sui poli di } F\text{)} \tag{1.20}$$

Condizione sufficiente affinchè l'integrale su Γ tenda a zero.

Teorema 1.25 *Condizione sufficiente per la validità della formula* (1.20)*, ossia che converga a zero l'integrale di* $\mathrm{e}^{st}F(s)$ *lungo* Γ *per* $R \to \infty$*, è che esistano due numeri positivi* M *e* k *tali che su* Γ *(dove* $s = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$*) risulti*

$$|F(s)| < \frac{M}{R^k}.$$

Tali condizioni sono sicuramente soddisfatte se $F(s)$ *è una funzione razionale, dunque esprimibile nella forma* $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ *con* $P(s)$ *e* $Q(s)$ *polinomi, se il grado di* $Q(s)$ *supera quello di* $P(s)$*.*

Nota: la dimostrazione del teorema, pur non presentando difficoltà sostanziali, viene trascurata in quanto molto tecnica.

Esempi (1) Calcolare $\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\Big\}$ mediante la formula di inversione.
Poichè $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)^2}$, la condizione sufficiente per la validità della (1.20) è chiaramente soddisfatta. Di conseguenza

$$f(t) = \mathrm{Res}\big(\mathrm{e}^{st}F(s), -1\big) + \mathrm{Res}\big(\mathrm{e}^{st}F(s), 2\big).$$

Essendo $s = -1$ un polo semplice ed $s = 2$ un polo doppio si ha:

$$\mathrm{Res}\big(\mathrm{e}^{st}F(s), -1\big) = \lim_{s\to-1}(s+1)\frac{\mathrm{e}^{st}}{(s+1)(s-2)^2} = \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-t}$$
$$\mathrm{Res}\big(\mathrm{e}^{st}F(s), 2\big) = \lim_{s\to 2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big[(s-2)^2\frac{\mathrm{e}^{st}}{(s+1)(s-2)^2}\Big] = \frac{1}{9}\mathrm{e}^{2t}(3t-1)$$

e di conseguenza

$$\mathcal{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\Big\} = \frac{1}{9}\Big[\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2t}(3t-1)\Big].$$

(2) Calcolare $\mathcal{L}^{-1}\big\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\big\}$.
Poichè anche in questo caso vale la condizione sufficiente per l'applicazione della (1.20), possiamo affermare che

$$f(t) = \mathrm{Res}\bigg(\frac{\mathrm{e}^{st}}{(s^2+1)^2}, -\mathrm{i}\bigg) + \mathrm{Res}\bigg(\frac{\mathrm{e}^{st}}{(s^2+1)^2}, \mathrm{i}\bigg)$$

essendo $\pm\mathrm{i}$ i poli doppi. Di conseguenza

$$\mathrm{Res}\bigg(\frac{\mathrm{e}^{st}}{(s^2+1)^2}, -\mathrm{i}\bigg) = \lim_{s\to-\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{e}^{st}}{(s-\mathrm{i})^2} = \frac{1}{4}(-t+\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$$
$$\mathrm{Res}\bigg(\frac{\mathrm{e}^{st}}{(s^2+1)^2}, \mathrm{i}\bigg) = \lim_{s\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{e}^{st}}{(s+\mathrm{i})^2} = \frac{1}{4}(-t-\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

e di conseguenza

$$f(t) = \frac{1}{2}\big(\sin(t) - t\cos(t)\big).$$

Numero infinito di punti singolari isolati Il precedente procedimento puo essere esteso al caso in cui la $F(s)$ presenta un'infinità numerabile di punti singolari isolati. In questo caso il contorno di Bromwich è scelto in modo da racchiudere un numero finito M di punti singolari, nessuno dei quali sulla frontiera del dominio. Indicato con L_M il raggio della circonferenza alla quale appartiene la curva Γ_M del contorno di Bromwich menzionato (figura 1.22) l'antitrasformata è calcolata come limite per $M \to \infty$ del risultato precedentemente ottenuto.

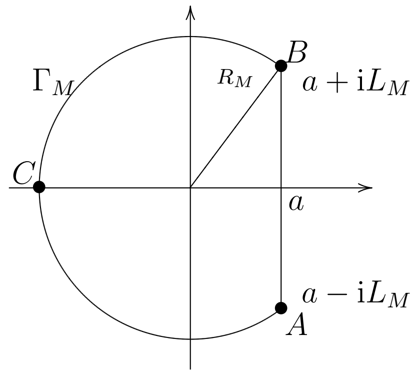


Figura 1.22: Contorno di Bromwich (contenente M punti singolari)

Antitrasformata in presenza di punti di diramazione Le considerazioni precedenti, con opportuni adattamenti, sono applicabili anche nel caso in cui la $F(s)$ abbia punti di diramazione. L'adattamento principale riguarda il contorno di Bromwich. Se, ad esempio, la $F(s)$ presenta un solo punto singolare che è di diramazione (in $s = 0$), il contorno assume la forma in figura 1.23. In essa gli archi BCD e HIA rappresentano archi di cerchi con centro l'origine e raggio

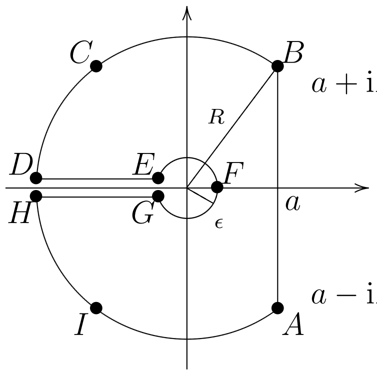


Figura 1.23: Contorno di Bromwich (caso di un punto di diramazione in $z = 0$)

R, e EFG un arco di una circonferenza con centro l'origine e raggio ϵ. La tecnica consiste nell'imporre che l'integrale lungo il contorno complessivo sia nullo (teorema di Cauchy) e poi nello studiare il comportamento della funzione $\mathrm{e}^{st}F(s)$ lungo gli archi di raggio R, per $R \to \infty$, e lungo l'arco di raggio ϵ, per $\epsilon \to 0$.