

***Corso della scuola di dottorato in Ingegneria
industriale:
“Metodi iterativi per la risoluzione di sistemi
lineari”***

Tesina di Manuela Di Mauro

**Metodi iterativi per la risoluzione di problemi
tomografici in applicazione a tecniche
Soniche/Ultrasoniche per la diagnostica non
distruttiva**

metodi non distruttivi per la rilevazione di problemi tomografici in applicazione a metodi non distruttivi Sonici/Ultrasonici

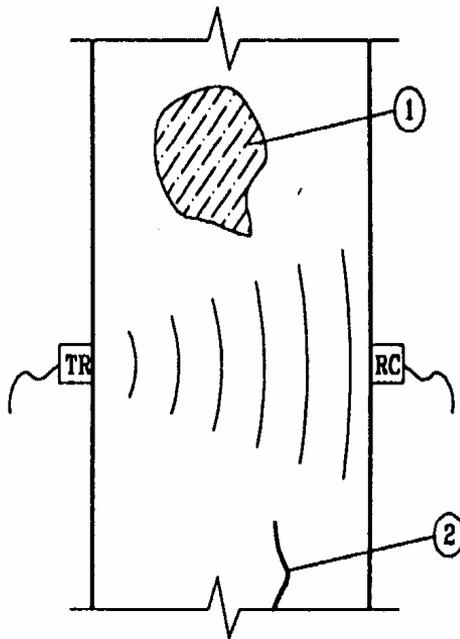
Dalla tecnica di trasmissione diretta alla tomografia sonora

La tomografia sonora rappresenta la naturale evoluzione della tecnica di trasmissione diretta o "per trasparenza". In tale tecnica, infatti, i sensori-emettitori, che immettono un'eccitazione alla struttura (che può essere il classico colpo di martello o l'immissione di un'onda ultrasonica) che viene rilevata nella parete opposta della struttura stessa, dopo aver attraversato quest'ultima lungo la sua dimensione longitudinale.

Il segnale che attraversa il corpo in esame è un'onda longitudinale o onda P, che viaggia ad una velocità proporzionale alla densità del mezzo attraversato.

Pertanto misurando il tempo di attraversamento dell'onda per trasparenza, si ottiene una sorta di velocità media del mezzo, che può contenere infatti zone a minore densità, quali vuoti o nidi di ghiaia, se il mezzo in esame si tratta di calcestruzzo.

In figura 1 si può osservare la tipica struttura di una prova per trasparenza.



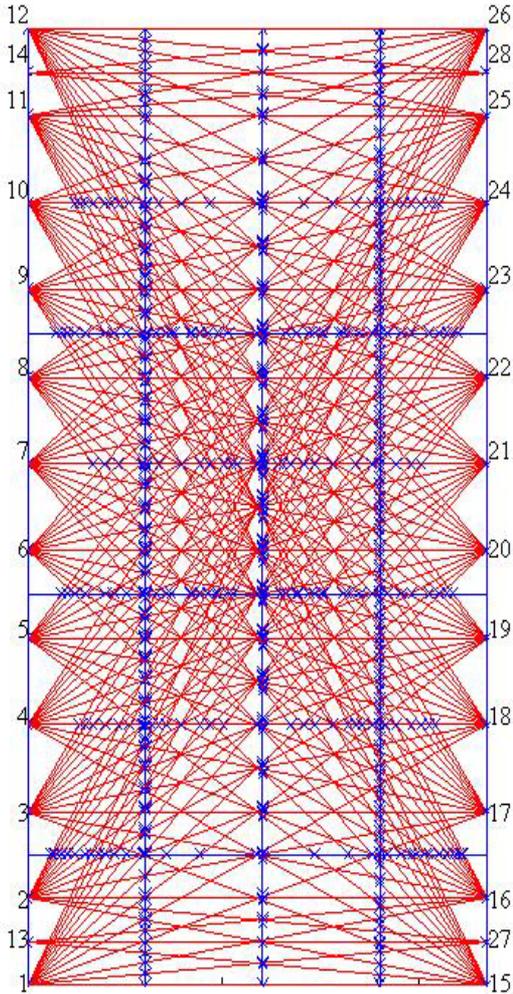
analisi per trasparenza

TR = dispositivo (sonda) emittente

RC = Dispositivo (sonda) ricevente

1-2 = disomogeneità rilevabili da una più o meno marcata opacità locale
nella trasmissione delle vibrazioni

Nella tomografia sonora, la struttura della campagna di misura è la medesima di quella relativa alla tecnica per trasparenza. La differenza fondamentale consiste nel fatto che i segnali sono emessi da più sorgenti e vengono acquisiti da più ricevitori, disposti in modo tale da consentire l'esecuzione di un elevato numero di misure del tempo di transito dei segnali che viaggiano lungo percorsi a diversa inclinazione e che mutuamente si incrociano su sezioni piane della struttura. Ovviamente le differenti sorgenti vengono fatte agire una alla volta.



In tal modo si ottengono delle misure corrispondenti a “raggi” d’onda che coprono il più possibile la struttura in esame.

Ciò consente di impostare un sistema algebrico, le cui incognite sono costituite dalle velocità del segnale nei nodi di un reticolo disposto sulla sezione piana del mezzo contenente le sorgenti ed i ricevitori.

Infatti, a partire dalla semplice formula della velocità:

$$v = \frac{dl}{dt}$$

Discretizzando la velocità come il semplice rapporto dello spazio diviso il tempo e chiamando “lentezza” l’inverso della velocità, il sistema diventa:

$$l \cdot \frac{1}{v} = t \Rightarrow l \cdot s = t$$

Dove l è la lunghezza attraversata dal raggio, s è la lentezza e t è il tempo di attraversamento.

Tale equazione non solo è valida per ogni singolo raggio ma se si discretizza il dominio tramite una griglia di $k \times j = n$ celle, la stessa equazione è ovviamente valida per ogni singola cella, ed il tempo di attraversamento del sensore i -esimo sarà pari alla somma dei tempi di tutte le celle attraversate dal singolo i -esimo raggio.

Il sistema algebrico così ottenuto, pertanto, avrà la forma:

$$M s = t$$

Dove:

$$M = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & l_{mn} \end{pmatrix}$$

è la matrice delle lunghezze, di dimensione mxn dove m è il numero dei raggi (numero delle eccitazioni per numero dei sensori) mentre n è il numero totale delle celle in cui è discretizzato il dominio.

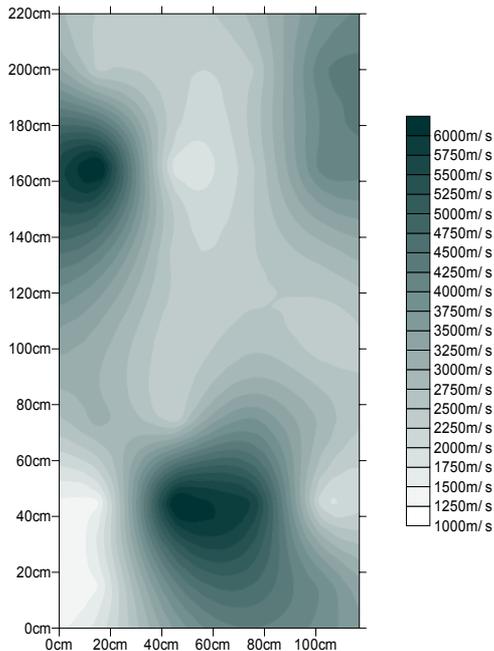
$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_n \end{pmatrix}$$

è il vettore delle lentezze $nx1$

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix}$$

è il vettore dei tempi misurati dai sensori di dimensione $mx1$

Una volta impostato il sistema tomografico, la risoluzione dello stesso consente di determinare la distribuzione della velocità su sezioni piane dell'oggetto indagato



Tuttavia, il problema tomografico e' un problema particolarmente complesso dal punto di vista matematico, in quanto gli algoritmi risolutivi sono non deterministici. Questo perchè il sistema algebrico è un sistema $m \times n$ dove solitamente $m \gg n$ ossia si hanno differenti celle attraversate da più di un raggio, il che rende il problema sovradeterminato, non fornendogli una soluzione unica. In più, la matrice M è il più delle volte una matrice sparsa, il che inserisce una indeterminazione per le celle non attraversate da nessun raggio, il che rende il problema particolarmente mal posto.

Per la risoluzione di tale problema sono solitamente utilizzati algoritmi iterativi per la risoluzione di sistemi lineari.

In tale lavoro, sono stati utilizzati il metodo del gradiente Biconiugato, variante del metodo del gradiente Coniugato che non necessita la simmetria della matrice M ed il metodo LSQR che è un metodo per la risoluzione ai minimi quadrati di problemi lineari contenenti matrici sparse, tramite una fattorizzazione QR incompleta.

Il risultato è dato da una sezione di velocità soniche/ultrasoniche reale ricostruita nelle due dimensioni), in cui le scale di tonalità dei colori evidenziano le anomalie presenti nell'oggetto

Il metodo del gradiente biconiugato non necessita che la matrice M sia autoaggiunta, ma necessita la moltiplicazione di M per la sua trasposta coniugata.

```

Compute  $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$  for some initial guess  $x^{(0)}$ .
Choose  $\tilde{x}^{(0)}$  (for example,  $\tilde{x}^{(0)} = x^{(0)}$ ).
for  $i = 1, 2, \dots$ 
  solve  $Mx^{(i-1)} = r^{(i-1)}$ 
  solve  $M^T \tilde{x}^{(i-1)} = r^{(i-1)}$ 
   $\rho_{i-1} = x^{(i-1)T} r^{(i-1)}$ 
  if  $\rho_{i-1} = 0$ , method fails
  if  $i = 1$ 
     $\beta^{(i)} = \rho^{(i-1)}$ 
     $\tilde{\beta}^{(i)} = \tilde{\rho}^{(i-1)}$ 
  else
     $\beta_{i-1} = \rho_{i-1} / \rho_{i-2}$ 
     $\beta^{(i)} = \rho^{(i-1)} + \beta_{i-1} \rho^{(i-2)}$ 
     $\tilde{\beta}^{(i)} = \tilde{\rho}^{(i-1)} + \beta_{i-1} \tilde{\rho}^{(i-2)}$ 
  endif
   $q^{(i)} = A\tilde{\beta}^{(i)}$ 
   $\tilde{q}^{(i)} = A^T \tilde{\beta}^{(i)}$ 
   $\alpha_i = \rho_{i-1} / \tilde{\beta}^{(i)T} q^{(i)}$ 
   $x^{(i)} = x^{(i-1)} + \alpha_i q^{(i)}$ 
   $r^{(i)} = r^{(i-1)} - \alpha_i q^{(i)}$ 
   $\tilde{r}^{(i)} = \tilde{r}^{(i-1)} - \alpha_i \tilde{q}^{(i)}$ 
  check convergence; continue if necessary
end

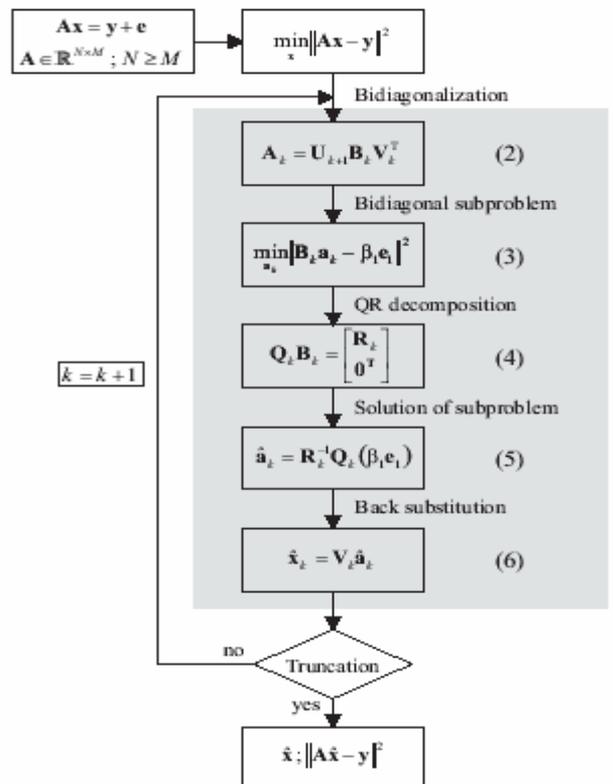
```

Barrett, R., M. Berry, T. F. Chan, et al., *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, SIAM, Philadelphia, 1994.

Metodo LSQR

Il metodo Sparse Equation Least Squares è un metodo iterativo basato sul processo di diagonalizzazione di Golub-Kahan ed è un metodo algebricamente equivalente al metodo del gradiente coniugato, ma è applicabile a matrici non simmetriche e presenta un miglior comportamento anche per matrici mal condizionate.

Il metodo risolve un sistema lineare nel senso dei minimi quadrati tramite la decomposizione della matrice A in due matrici ortonormali U e V ed una matrice bidiagonale B tali che $A = U_{k+1} B_k V_k^T$. Per M iterazioni la matrice A è interamente decomposta, mentre di solito il metodo si ferma per una $k \ll M$.



Metodo CGS

Il metodo Conjugate Gradient Least Squares, è un metodo in cui i residui $r(i)$ possono essere visti come prodotto di $r(0)$ e di un polinomio di grado i -esimo in A , essendo A la matrice del sistema da risolvere:

$$r(i) = P_i(A) r(0)$$

Lo stesso polinomio deve soddisfare:

$$r'(i) = P_i(A^T) r'(0)$$

In modo tale da avere:

$$\rho_i = (r'(i), r(i)) = (P_i(A^T) r'(0), P_i(A) r(0)) = (r'(0) P_i^2(A) r(0))$$

Il metodo pertanto si traduce in:

```
Compute  $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$  for some initial guess  $x^{(0)}$ 
Choose  $\tilde{r}$  (for example,  $\tilde{r} = r^{(0)}$ )
for  $i = 1, 2, \dots$ 
   $\rho_{i-1} = \tilde{r}^T r^{(i-1)}$ 
  if  $\rho_{i-1} = 0$  method fails
  if  $i = 1$ 
     $u^{(i)} = r^{(0)}$ 
     $p^{(i)} = u^{(i)}$ 
  else
     $\beta_{i-1} = \rho_{i-1} / \rho_{i-2}$ 
     $u^{(i)} = r^{(i-1)} + \beta_{i-1} u^{(i-1)}$ 
     $p^{(i)} = u^{(i)} + \beta_{i-1} (q^{(i-1)} + \beta_{i-1} p^{(i-1)})$ 
  endif
  solve  $Ax = p^{(i)}$ 
   $\hat{x} = Ax$ 
   $\alpha_i = \rho_{i-1} / p^{(i)T} \hat{x}$ 
   $q^{(i)} = u^{(i)} - \alpha_i \hat{x}$ 
  solve  $Ax = u^{(i)} + q^{(i)}$ 
   $x^{(i)} = x^{(i-1)} + \alpha_i \hat{x}$ 
   $\hat{q} = Ax$ 
   $r^{(i)} = r^{(i-1)} - \alpha_i \hat{q}$ 
  check convergence; continue if necessary
end
```

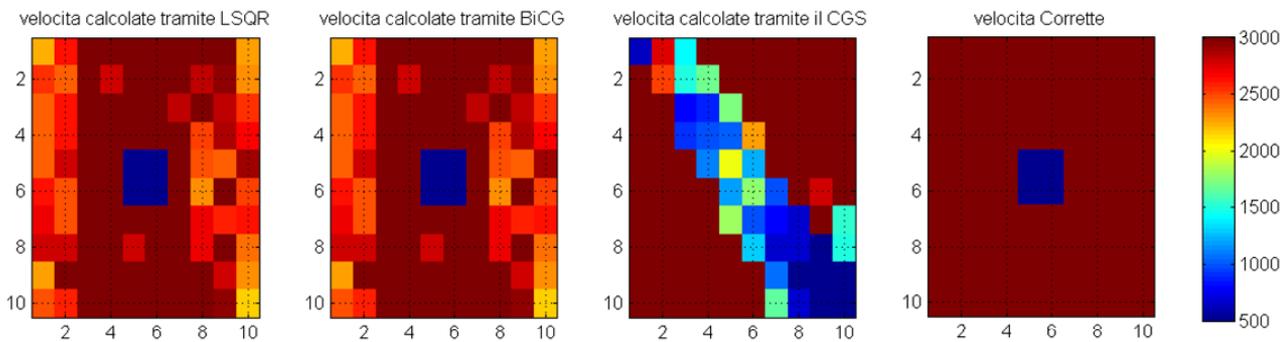
Nonostante le velocità di convergenza di questo algoritmo sia circa il doppio del BiCG, che è in accordo col fatto che lo stesso operatore di contrazione è utilizzato due volte, nella $u(i)$ e nella $p(i)$. Tuttavia questo può essere la causa di un comportamento irregolare nella convergenza del metodo. Infatti lo step può essere così grande che faccia sì che sussistano effetti di cancellazione, che producono una soluzione meno accurata di quella suggerita dal valore del residuo. Il metodo tende a divergere se il valore iniziale è vicino alla soluzione.

Van Rosendale, J., Minimizing inner product data dependencies in conjugate gradient iteration, Tech. Rep. 172178, ICASE, NASA Langley Research Center, 1983.

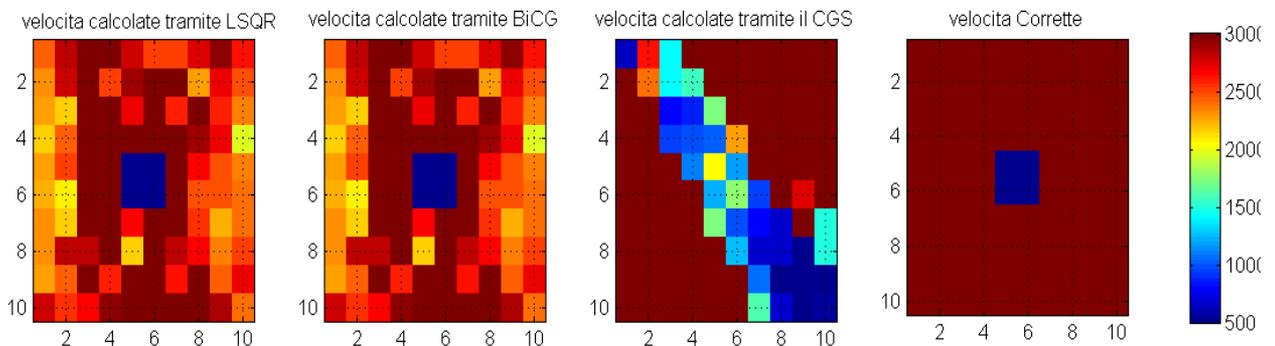
Risultati su dati sintetici

Per testare gli algoritmi sono stati innanzitutto utilizzati dei dati sintetici, realizzando un vettore delle ltezze noto corrispondenti a delle velocità di 3000 m/s, in cui è stata inserita un'anomalia centrale a 500 m/s. Dunque, nota M ed il vettore s , è stato quindi calcolato il vettore dei tempi t . A questo punto, sono stati utilizzati i suddetti algoritmi per la ricostruzione del vettore s .

Come si può osservare in figura, i primi due algoritmi rispondono bene al test, con degli errori che si accentuano solo in prossimità dei bordi del dominio (celle con non attraversate dal segnale e in prossimità del difetto per il caso della LSQR. L'algoritmo CGS è quello che presenta la maggiore dispersione dei dati



Allo scopo di simulare la presenza di cavi e degli errori di acquisizione (differenza di pressione sui sensori, minore o maggiore aderenza del sensore all'oggetto e via dicendo), sono state effettuate delle prove con l'aggiunta di rumore casuale del 10% sui dati. anche in tal caso gli algoritmi presentano entrambi una buona risposta, non generando variazioni sui risultati superiori del 20% e individuando comunque il difetto. Nonostante la risposta dell'algoritmo CGS risulti stabile alla presenza di rumore, tale algoritmo è stato scartato per le successive prove su dati reali.



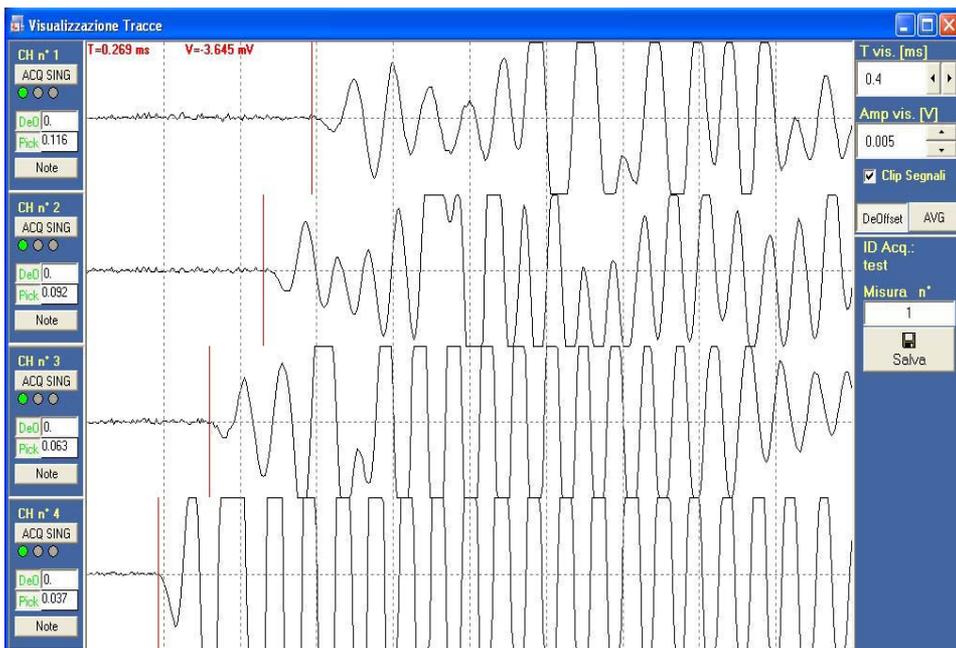
Prove su dati reali

Infine, i metodi sono stati applicati a dati reali.

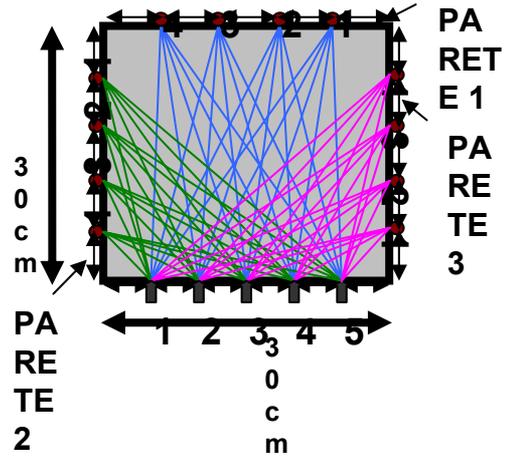
Tali segnali sono stati acquisiti tramite una centralina multicanale TDAS dotata di accelerometri piezoelettrici per la generazione del segnale e di quattro sensori di acquisizione, anch'essi accelerometri piezoelettrici



I dati di partenza utilizzati nel presente studio sono del tipo mostrato in figura, in cui sono riportate le misure in ingresso ed in uscita, e di cui lo strumento restituisce direttamente i tempi di ritardo che sono utilizzati per l'impostazione del sistema tomografico.



Le prove sono state effettuate su un pilastro di calcestruzzo di sezione orizzontale 30x30 cm ed i risultati qui presentati sono relativi alle prove effettuate ponendo gli emettitori sulla parete 2 ed i ricevitori sulla parete 3.



I risultati mostrano una buona risposta degli algoritmi utilizzati, come è mostrato nella figura, in cui non compaiono difetti nel pilastro che può pertanto essere considerato come sano, ossia esente da elementi che ne possono pregiudicare la stabilità.

