

Università degli Studi di Cagliari  
Corso di Laurea in Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio  
A.A. 2004/2005

# **Analisi dell'errore**

## **Metodo delle Potenze e delle Potenze inverse**

Studenti:

Paola Caredda      matr. num. 33487

Cristina Pedone    matr. num. 33218

Docente:

Prof. Giuseppe Rodriguez

## 1. Premessa

Lo svolgimento di questa esercitazione si riferisce all'utilizzo di alcuni programmi, basati su algoritmi visti in laboratorio. In particolare si fa riferimento al metodo delle potenze e delle potenze inverse. Si sono eseguite 4 prove cambiando la dimensione della matrice. Gli algoritmi hanno restituito rispettivamente il grafico dell'errore sull'autovalore di modulo massimo e di modulo minimo. In aggiunta si è analizzata la convergenza della matrice avente  $\lambda_1 = \pm\lambda_2$ .

## 2. Algoritmi

Un algoritmo è una sequenza univoca di un numero finito di operazioni elementari che stabilisce come calcolare la soluzione di un problema, assegnati certi dati iniziali.

Sottolineiamo l'importanza di alcune parole presenti nella definizione:

- *sequenza univoca* non è sufficiente dare una formula, deve essere chiaro anche in che ordine bisogna eseguire le operazioni;
- *operazioni elementari* si tratta di una nozione relativa, devono essere elementari, cioè di semplice comprensione, per chi leggerà l'algoritmo;
- *numero finito* se l'algoritmo è iterativo deve essere fornito un criterio di arresto;
- *input/output* deve essere chiaro il numero ed il tipo dei dati richiesti dall'algoritmo e di quelli da esso generati.

Gli algoritmi vengono generalmente rappresentati mediante *mappe strutturali*, una sorta di programmi scritti utilizzando un pseudo-codice. Non è necessario utilizzare regole sintattiche ferree per la loro stesura, è sufficiente essere chiari e precisi.

### 2.1 Caratterizzazione degli algoritmi

Gli errori da cui sono affetti i dati possono subire un'amplificazione a causa del cattivo condizionamento di un problema. Ebbene, gli algoritmi hanno essi stessi la caratteristica di propagare in vario modo gli errori.

Si definisce *stabile* (risp. *instabile*) un algoritmo nel quale la successione delle operazioni non amplifica (risp. amplifica) eccessivamente gli errori presenti sui dati.

La *complessità computazionale* di un algoritmo è il numero delle operazioni in virgola mobile necessarie per risolvere un problema mediante l'algoritmo dato. La complessità computazionale è proporzionale al tempo di calcolo, ma, a differenza di questo, non dipende dal particolare computer utilizzato. L'unità di misura è il flop (floating point operation = operazione in virgola mobile), ma spesso vengono utilizzati i suoi multipli (Kflop, Mflop, Gflop).

In genere non interessa conoscere con esattezza la complessità computazionale di un algoritmo, ma ci si accontenta del suo ordine di grandezza rispetto alla dimensione  $n$  del problema.

Talvolta il flop è utilizzato nella misura della velocità di elaborazione, spesso intesa nel calcolo scientifico come numero di operazioni in virgola mobile per secondo (flop/s, o semplicemente flops).

Un'altra caratteristica degli algoritmi, di fondamentale importanza per problemi di dimensione elevata, è l'*occupazione di memoria* da essi richiesta.

### 3. Autovalori e Autovettori

Si dicono *autovalore* ed *autovettore* di una matrice  $A$  uno scalare  $\lambda$  ed un vettore  $x \neq 0$  che verifichino la relazione

$$Ax = \lambda x$$

Riscriviamo l'equazione nella forma

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Perché questo sistema lineare omogeneo ammetta una soluzione non nulla è necessario che il suo determinante

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

si annulli. Dal momento che  $p_A(\lambda)$  è un polinomio di grado  $n$  in  $\lambda$ , detto *polinomio caratteristico* di  $A$ , il *Teorema fondamentale dell'Algebra* assicura l'esistenza di  $n$  autovalori (non necessariamente reali e distinti) che possono essere determinati calcolando gli zeri di  $p_A(\lambda)$ .

Per ciascun autovalore  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , una soluzione non nulla del sistema singolare

$$(A - \lambda_k I)x = 0$$

fornisce il corrispondente autovettore, che, nel caso in cui la matrice  $A - \lambda_k I$  abbia rango  $n-1$ , resta quindi determinato a meno di una costante moltiplicativa. Definiamo spettro di una matrice l'insieme dei suoi autovalori

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

e raggio spettrale il massimo dei moduli degli autovalori

$$\rho(A) = \max_{k=1, \dots, n} |\lambda_k|$$

Alcune proprietà:

- $\det(A) = \prod_{k=1}^n \lambda_k$
- $(\sigma(A^T)) = \sigma(A)$ ,  $\sigma(A^{-1}) = \{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$ ,  $\sigma(A^p) = \{\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p\}$ ;
- ad autovalori distinti corrispondono autovettori indipendenti;

- se un autovettore  $x$  è noto, il quoziente di Rayleigh  $x^k \rightarrow x$  fornisce il corrispondente autovalore.

La molteplicità algebrica di un autovalore è la sua molteplicità come zero del polinomio caratteristico. Si definisce, invece, molteplicità geometrica di un autovalore il massimo numero di autovettori indipendenti ad esso corrispondenti. In generale per ogni autovalore si ha sempre molteplicità geometrica  $\leq$  molteplicità algebrica.

Se per un autovalore vale il minore stretto, la matrice viene detta difettiva.

Il calcolo degli autovalori ed autovettori di una matrice è un problema non lineare e, come tale, potenzialmente delicato. Esso non viene di regola affrontato attraverso l'algoritmo classico, determinando cioè gli autovalori come zeri del polinomio caratteristico, ma mediante opportuni metodi iterativi basati su idee differenti. Gli algoritmi che sono stati sviluppati a questo scopo sono a volte talmente efficaci da portare, come vedremo in seguito, a riformulare lo stesso problema della determinazione degli zeri di un polinomio come problema di autovalori.

La valutazione degli autovalori è comunque computazionalmente onerosa. Inoltre, in determinate situazioni il problema è fortemente instabile e porta ad approssimazioni inaccurate. Per questo motivo, spesso ci si accontenta solo di una risposta parziale:

- localizzare gli autovalori, cioè determinare una regione del piano complesso che contenga tutti gli autovalori;
- operare una separazione degli autovalori, cioè determinare degli insiemi che contengano ciascuno un solo autovalore;
- determinare l'autovalore di modulo massimo e/o di modulo minimo (autovalori estremali), informazioni utili, ad esempio, per rilevare la singularità di una matrice e per calcolarne il raggio spettrale o il numero di condizionamento in norma 2, nell'eventualità che si tratti di una matrice simmetrica;
- raffinare una stima di un particolare autovalore, ottenuta mediante un altro algoritmo o tramite informazioni a priori;
- nell'ipotesi che sia noto un autovalore, trovare una matrice di dimensione  $n - 1$  che abbia gli stessi autovalori della matrice iniziale tranne quello noto (deflazione);
- dato un autovalore, trovare il corrispondente autovettore.

Definizione. Le matrici  $A$  e  $B$  si dicono simili quando esiste una matrice  $S$  non singolare tale che

$$B = S^{-1}AS.$$

Teorema. Matrici simili hanno gli stessi autovalori.

Definizione. Una matrice  $A$  si dice diagonalizzabile se esiste una matrice  $X$  non singolare tale che

$$X^{-1}AX = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Una matrice diagonalizzabile è dunque simile ad una matrice diagonale.

Teorema. Una matrice  $A$  di dimensione  $n$  è diagonalizzabile se e solo se ammette  $n$  autovettori indipendenti.

#### 4. Il Metodo delle Potenze

Il metodo delle potenze è un metodo iterativo che consente di approssimare l'autovalore  $\lambda_1$  di massimo modulo di una matrice  $A$  e l'autovettore ad esso corrispondente. Esso converge quando sono verificate le seguenti tre ipotesi:

1.  $A$  è diagonalizzabile;
2. il vettore iniziale  $x^{(0)}$  ha una componente non nulla lungo l'autovettore  $v_1$ , corrispondente a  $\lambda_1$ ;
3. l'autovalore di modulo massimo è separato dagli altri, ovvero

$$|\lambda_1| > |\lambda_i|, i = 2, \dots, n.$$

Descriviamo ora come agisce questo algoritmo.

Nel metodo delle potenze viene costruita, a partire da un vettore iniziale  $x^{(0)}$ , una successione di vettori il cui termine  $k$ -esimo è  $x^{(k)} = A^k x^{(0)}$  (questo spiega il nome del metodo). Essendo  $A$  diagonalizzabile, esiste una base di autovettori e quindi il vettore iniziale  $x^{(0)}$  può essere espresso come loro combinazione lineare

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad (1)$$

dove  $A v_i = \lambda_i v_i, i = 1, \dots, n$ . Sfruttando la 1 si ottiene:

$$x^{(k)} = A^k x^{(0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i A^k v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k v_i$$

e, applicando la seconda ipotesi ( $\alpha_1 \neq 0$ ),

$$x^{(k)} = \alpha_1 \lambda_1^k v_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \lambda_i^k v_i = \alpha_1 \lambda_1^k \left( v_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k v_i \right)$$

Per la terza ipotesi, il rapporto  $\left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k$  converge a zero per  $k \rightarrow \infty$  e di conseguenza il

vettore  $x^{(k)}$  tende ad essere parallelo all'autovettore  $v_1$ , o meglio a coincidere con esso, dato che un autovettore è determinato a meno di una costante moltiplicativa.

Il problema numerico di questo processo consiste nel fatto che la norma di  $x^{(k)}$  converge a zero quando  $|\lambda_1| < 1$  e all'infinito quando  $|\lambda_1| > 1$ , comportando nei due casi fenomeni di underflow e overflow, rispettivamente.

Questo fatto suggerisce di procedere alla normalizzazione del vettore  $x^{(k)}$  ad ogni iterazione, in modo da evitare che la sua norma cresca o decresca in modo eccessivo. Inoltre, sempre per motivi numerici, è opportuno valutare  $x^{(k)}$  a partire dal vettore ottenuto all'iterazione precedente mediante la formula

$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)}$$

Ad ogni passo l'autovalore  $\lambda_1$  può essere approssimato mediante il quoziente di Rayleigh:

$$\lambda_1^k = \frac{(x^{(k)})^T Ax^{(k)}}{(x^{(k)})^T x^{(k)}}$$

Il denominatore può essere tralasciato se si applica il *metodo delle potenze con normalizzazione in norma 2*. Sarà inoltre necessario introdurre un criterio di stop del tipo

$$|\lambda_1^{(k)} - \lambda_1^{(k-1)}| < \tau \cdot |\lambda_1^{(k)}| \text{ or } k > N,$$

avendo fissato una tolleranza  $\tau > 0$  e un numero massimo di iterazioni  $N$ . La mappa strutturale del metodo è la seguente:

1. scegli  $x^{(0)}$ ,  $\tau$  e  $N$
2.  $q^{(0)} = x^{(0)} / \|x^{(0)}\|_2$
3.  $k = 0$
4.  $\lambda^{(0)} = 0$
5. repeat
  1.  $k = k + 1$
  2.  $x^{(k)} = Aq^{(k-1)}$
  3.  $q^{(k)} = x^{(k)} / \|x^{(k)}\|_2$
  4.  $\lambda^{(k)} = (q^{(k)})^T Aq^{(k)}$
6. until  $|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}| < \tau \cdot |\lambda^{(k)}|$  or  $k > N$

Se le ipotesi sono verificate,  $\lambda^{(k)}$  converge all'autovalore di modulo massimo e  $q^{(k)}$  al corrispondente autovettore normalizzato. La scelta del vettore iniziale  $x^{(0)}$  è libera, ma è conveniente inizializzarlo con un vettore di numeri casuali per ridurre le probabilità di violare la seconda ipotesi. Il metodo delle potenze può essere adattato al fine di approssimare l'autovalore di modulo minimo di una matrice non singolare, in questo caso viene detto *metodo delle potenze inverse*. Infatti, poiché

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \Rightarrow \sigma(A^{-1}) = \{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$$

È possibile applicare l'algoritmo alla matrice inversa  $A^{-1}$  per approssimare il suo autovalore di modulo massimo  $\lambda_n^{-1}$ , ammesso che  $A$  sia diagonalizzabile,  $x^{(0)}$  abbia componente non nulla rispetto a  $v_n$  e

$$\frac{1}{|\lambda_n|} > \frac{1}{|\lambda_i|}, i = 1, \dots, n-1$$

Per motivi numerici non calcoleremo l'iterata k-esima dalla formula  $x^{(k)} = A^{-1}x^{(k-1)}$  ma risolvendo il sistema lineare

$$Ax^{(k)} = x^{(k-1)}$$

Inoltre, per ridurre il carico computazionale, sarà opportuno fattorizzare la matrice A all'inizio del processo e risolvere ad ogni passo due sistemi triangolari, si veda l'algoritmo sotto riportato:

1. scegli  $x^{(0)}$ ,  $\tau \in \mathbb{N}$
2.  $q^{(0)} = x^{(0)} / \|x^{(0)}\|_2$
3. fattorizza  $A = LU$  (opp.  $PA = LU$ ,  $QR$ ,  $R^TR$ , etc.)
4.  $k = 0$
5.  $\lambda^{(0)} = 0$
6. repeat
  1.  $k = k + 1$
  2. risolvi  $Ly = q^{(k-1)}$
  3. risolvi  $Ux^{(k)} = y$
  4.  $q^{(k)} = x^{(k)} / \|x^{(k)}\|_2$
  5.  $\lambda^{(k)} = (q^{(k)})^T A q^{(k)}$
7. until  $|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}| < \tau \cdot |\lambda^{(k)}|$  or  $k > N$

Se le ipotesi di convergenza sono verificate si avrà  $\lambda^{(k)} \rightarrow \lambda_n^1$  per  $k \rightarrow \infty$

Osserviamo, infine, che l'autovalore più grande in modulo della matrice  $(A - \mu I)^{-1}$  è  $(\lambda_1 - \mu)^{-1}$ , essendo  $\lambda_1$  l'autovalore di A più prossimo a  $\mu$ . E' dunque possibile applicare il metodo delle potenze inverse alla matrice  $(A - \mu I)$  al fine di determinare l'autovalore di A più vicino ad un valore prefissato  $\mu$  e, quindi, per migliorare una stima di  $\lambda_1$  o per trovare l'autovettore corrispondente a tale autovalore. Se inoltre fosse disponibile un'approssimazione molto accurata dell'autovalore  $\lambda_1$ , sarebbe necessario perturbarla, fissando  $\mu = \lambda_1 + \varepsilon$  per un appropriato valore di  $\varepsilon$  e applicare poi il metodo delle potenze inverse alla matrice  $(A - \mu I)$ . Infatti tale metodo non è applicabile ad una matrice singolare.

Il metodo delle potenze può dunque essere utilizzato per calcolare gli autovalori estremali di una matrice, per migliorare una stima di un autovalore e per determinare l'autovettore associato ad un autovalore assegnato.

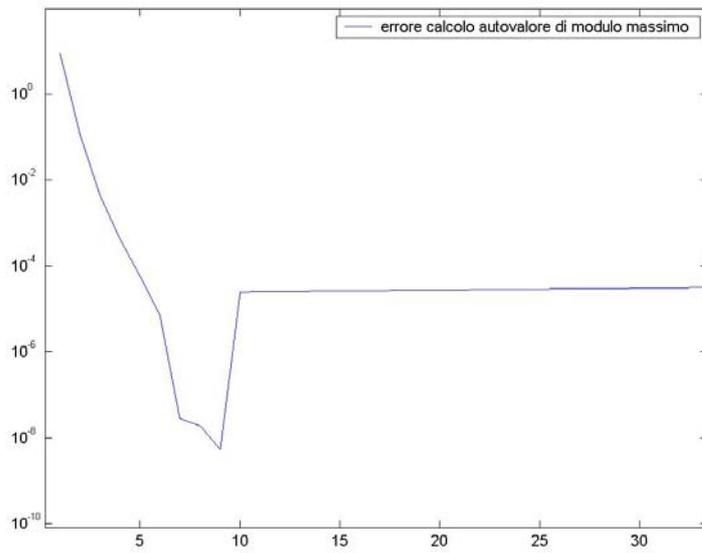
## 5. Metodo delle potenze e delle potenze inverse

In questo paragrafo viene mostrato il listato utilizzato per il calcolo degli autovalori di modulo minimo e massimo e i risultati ottenuti variando per quattro volte la dimensione della matrice. Gli algoritmi hanno restituito rispettivamente il grafico dell'errore sull'autovalore di modulo massimo e su quello minimo. In seguito si è introdotta una prima matrice avente  $\lambda_1 = \lambda_2$  e una seconda matrice avente  $\lambda_1 \cong -\lambda_2$  (differenza 0,01): il metodo converge solo nel primo caso. Assegnati i dati si è applicato l'algoritmo:

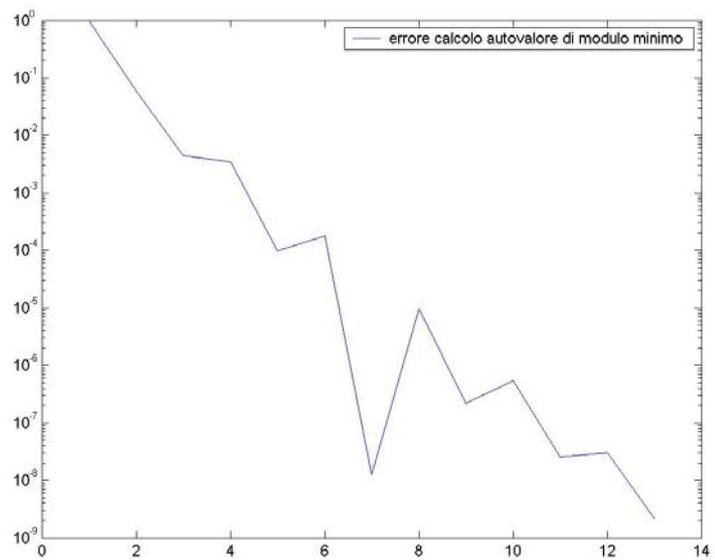
```
%metodo delle potenze e delle potenze inverse per il calcolo dell'autovalore di modulo massimo e  
%di modulo minimo di una matrice  
  
n=20;  
A=rand(n);  
[V D]=eig(A); %matrice degli autovettori e degli autovalori  
lmax=max(diag(D)) %autovalore di modulo massimo  
lmin=min(diag(D)) %autovalore di modulo minimo  
tau=1e-8; %errore massimo relativo  
maxn=200; %massimo numero di iterazioni  
%ricerca dell'autovalore di modulo massimo con il metodo delle potenze  
x0=rand(n,1); %vettore di iterazione iniziale  
q=x0/norm(x0); %vettore di iterazione iniziale normalizzato in norma 2  
lambdap=0;  
lambda=1; %inizializzazione dell'autovalore di modulo massimo  
k=0; %inizializzazione del contatore  
%il ciclo while compie le iterazioni sino a convergenza  
while (abs(lambdap-lambda)>tau) & (k<maxn)  
    lambdap=lambda;  
    x=A*q;  
    q=x/norm(x);  
    lambda=q'*A*q;  
    errore=abs(lambda-lmax); %errore al generico passo rispetto all'autovalore di  
    %modulo max già calcolato  
    error(k+1,1)=errore; %metto in un vettore l'errore appena calcolato  
    k=k+1;  
end
```



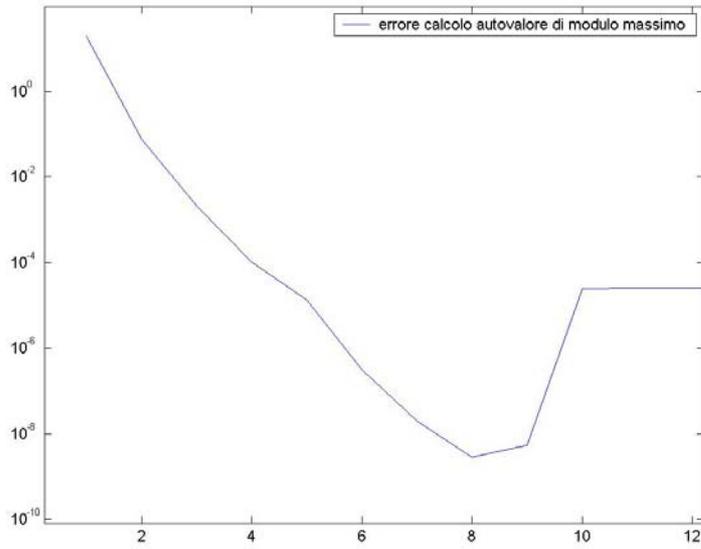
Risultati:



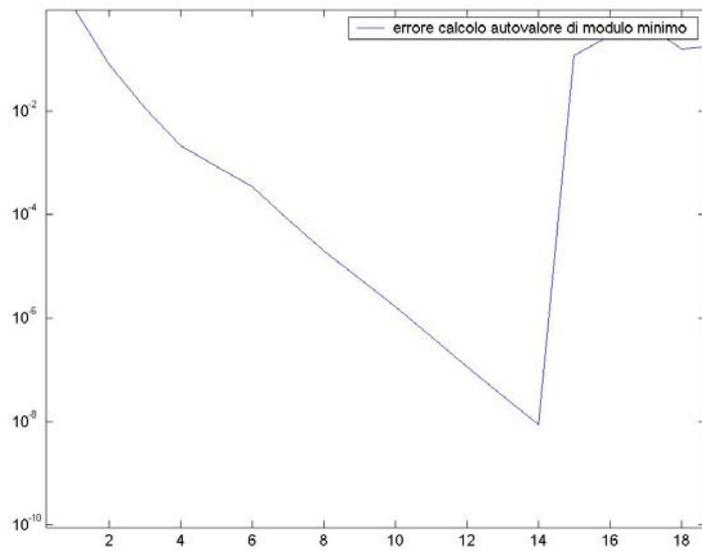
**Figura 5.1. Errore del metodo delle potenze su una matrice di dimensione  $n=20$**



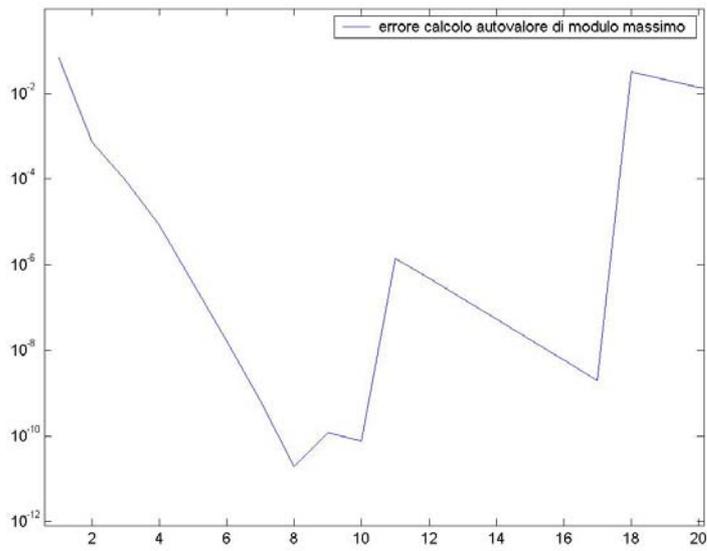
**Figura 5.2. Errore del metodo delle potenze inverse su una matrice di dimensione  $n=20$**



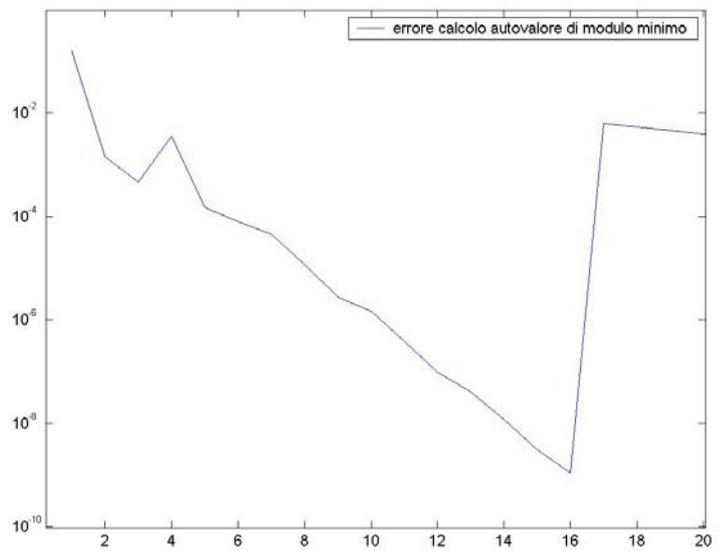
**Figura 5.3. Errore del metodo delle potenze su una matrice di dimensione  $n=40$**



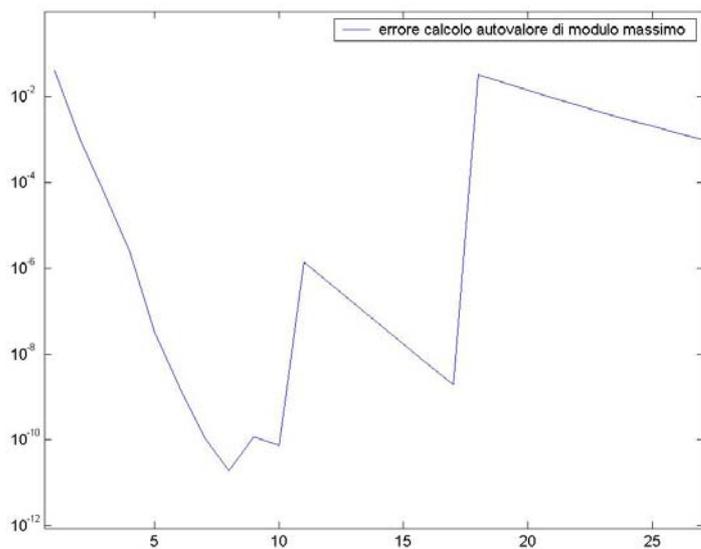
**Figura 5.4. Errore del metodo delle potenze inverse su una matrice di dimensione  $n=40$**



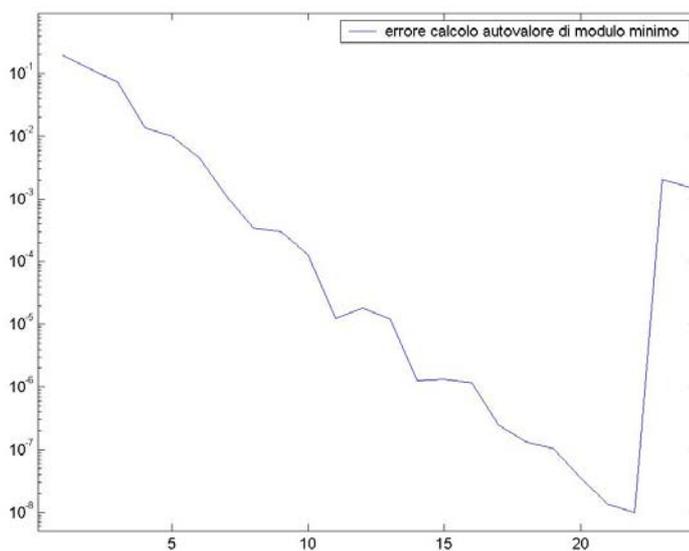
**Figura 5.5. Errore del metodo delle potenze su una matrice di dimensione  $n=80$**



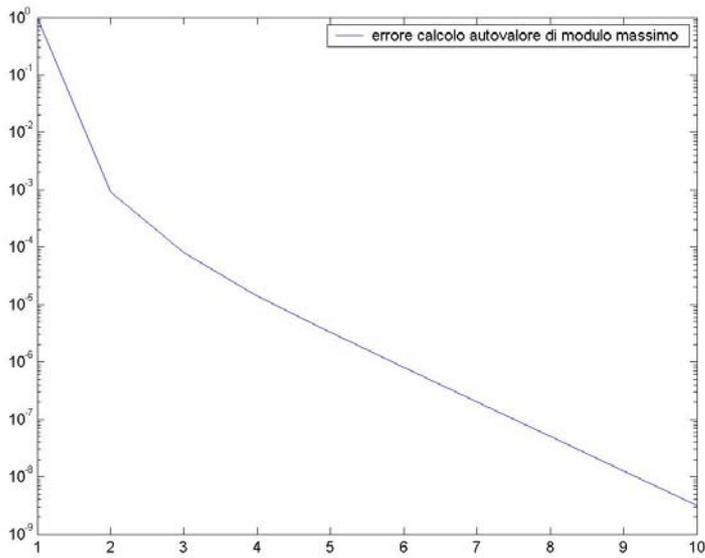
**Figura 5.6. Errore del metodo delle potenze inverse su una matrice di dimensione  $n=80$**



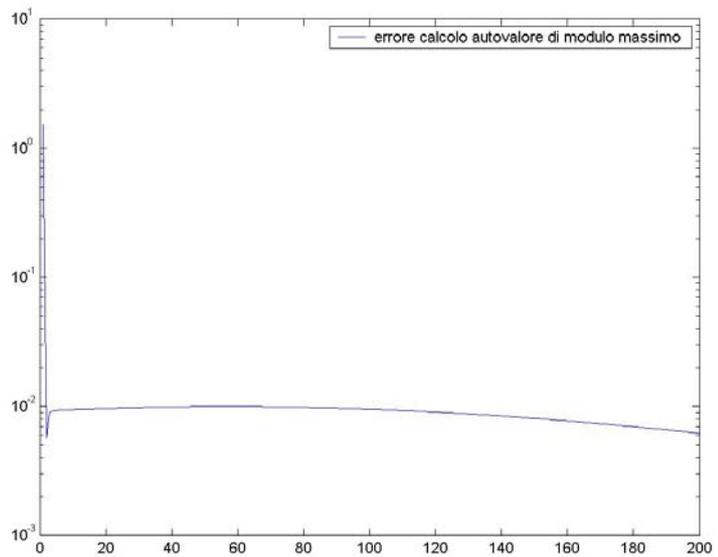
**Figura 5.7. Errore del metodo delle potenze su una matrice di dimensione  $n=160$**



**Figura 5.8. Errore del metodo delle potenze inverse su una matrice di dimensione  $n=160$**



**Figura 5.9.** Errore del metodo delle potenze su una matrice con  $\lambda_1 = \lambda_2$



**Figura 5.10.** Errore del metodo delle potenze su una matrice con  $\lambda_1 \sim -\lambda_2$