



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI CAGLIARI

FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Elettrica, Elettronica e Informatica

Tesina di Algoritmi Numerici e Applicazioni

Identificazione del modello matematico di un
sistema LTI nel dominio della frequenza:
fattorizzazione del sistema lineare.
Metodi matematici per l'Ingegneria.

Prof. Giuseppe Rodriguez

A cura di:

Nicola Lombardi

Appendice

L'alta complessità del lavoro di Tesi è stata affrontata grazie alle competenze acquisite tramite il corso di Matematica Applicata del corso di laurea triennale (dello stesso candidato) e tramite il corso di Algoritmi Numerici ed Applicazioni della laurea magistrale in matematica, entrambi dell'Università di Cagliari e del docente, nonché relatore di questa Tesi, Giuseppe Rodriguez.

Come appendice al lavoro di Tesi viene esposto un percorso che porta alla definizione dell'utilizzo delle fattorizzazioni matriciali e dei minimi quadrati: due strumenti citati e non utilizzati nel lavoro centrale della Tesi. Di seguito è illustrato l'indice.

INDICE

Prefazione

1 INTRODUZIONE

1.1 Generalità

1.2 Risposta a regime ad un ingresso sinusoidale

2 Cenni essenziali sui sistemi LTI

2.1 Introduzione al problema nel dominio della frequenza

2.2 Sistemi lineari

2.3 Assunzioni di lavoro sul sistema dinamico

2.4 Metodo della Pendenza Finale del Diagramma di Bode

2.5 La composizione del sistema lineare

3 Fattorizzazioni della matrice A (e non solo)

3.1 Generalità sulle fattorizzazioni

3.2 Introduzione al problema

3.3 Matrici di Householder

3.4 Progettazione del software

3.5 *Fattorizzazione $A=QR$ di Householder*

3.6 *Esempio di fattorizzazione del sistema lineare per un sistema LTI*

3.7 *Backword substitution*

3.8 *Sviluppo dei minimi quadrati con fattorizzazione $A=QR$*

3.9 *Fattorizzazione di Cholesky*

4 Alcuni “perché?” dei fatti

4.1 *Conclusione del lavoro sui sistemi LTI*

4.2 *Dimostrazione della non linearità di un motore in corrente continua*

4.3 Errori di stima del trasduttore di ordine di sistema LTI

5 Metodi matematici per l'Ingegneria elettrica ed informatica

5.1 Introduzione

5.2 Moltiplicatori di Lagrange per la sezione di un conduttore di un impianto elettrico

5.3 Determinazione dei coefficienti di Fourier tramite minimi quadrati

5.4 Metodo delle approssimazioni successive

5.5 Metodo alle differenze finite di Eulero-Cauchy

6 Verifica della bontà degli algoritmi

6.1 Fattorizzazione di Householder e Cholesky

6.2 Metodo di Eulero esplicito

6.3 Metodo delle approssimazioni successive

7 Complessità computazionale

7.1 Cosa è la complessità computazionale

7.2 Complessità computazionale nelle fattorizzazioni

Conclusione

Bibliografia

Prefazione

L'analisi nel dominio della frequenza, per i sistemi lineari e stazionari, costituisce uno degli strumenti più importanti ed efficaci per lo studio di talune proprietà, quali ad esempio le **proprietà filtranti**. L'analisi in tale dominio si basa sulla particolare forma che l'uscita di un sistema lineare e stazionario stabile assume in risposta ad un segnale in ingresso di tipo **sinusoidale**. Tuttavia, in virtù del principio di sovrapposizione delle cause e degli effetti, tale tipo di analisi si può estendere a classi molto più ampie di segnali in ingresso, ossia a tutti quei segnali che possono essere rappresentati come una combinazione lineare, finita o infinita, di componenti sinusoidali.

A seconda del caso, avremo un formalismo relativo alla risposta all'ingresso sinusoidale che dipenderà proprio dalla classe del segnale.

Tornerà molto utile sfruttare quella che è nota come Formula di Eulero:

$$e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i \sin(x),$$
$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$
$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Infatti la **Trasformata di Steinmetz** è basata proprio su tale formalismo per convertire un segnale del tempo nel suo analogo nella frequenza e viceversa.

Sia $f(t): [-\pi/\omega, \pi/\omega]$ a valori reali, si definisce sua trasformata la funzione di variabile reale $F(\omega)$ data da:

$$S\{f(t)\}(\omega) = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Questa trasformata integrale trasforma le equazioni integrali e le equazioni differenziali in equazioni polinomiali, che sono più immediate da risolvere.

Anche la risposta (l'uscita) di un sistema dinamico lineare può essere calcolata come prodotto di convoluzione della sua risposta impulsiva unitaria con il segnale d'ingresso. Sviluppando questo calcolo la convoluzione diventa una moltiplicazione, che spesso rende il problema più semplice. La trasformata di Steinmetz può anche essere usata per risolvere le equazioni differenziali: se ne farà uso proprio in questo ambito.

Si prova che se una funzione $g(s)$ ha la trasformata inversa $f(t)$, ovvero è una funzione continua a tratti che soddisfa la condizione:

$$s\{f(t)\}(\omega) = g(\omega)$$

allora è univocamente determinata:

$$s^{-1}\{g\}(t) = \operatorname{Re}(g(\omega)e^{i\omega t}).$$

La trasformata di Steinmetz è molto utile per esprimere in forma esponenziale i segnali sinusoidali, le risposte armoniche e le risposte a regime sinusoidale dei sistemi LTI, ovviamente stabili. E' strettamente legata alla trasformata di Fourier. A differenza di questa però il dominio di integrazione dipende dalla variabile di trasferimento

Ai fini della trattazione è necessario giustificare determinati termini rivolti alla Teoria dei Sistemi con una piccola introduzione ai sistemi **Single Input Single Output** e alla rappresentazione delle variabili di stato.

In generale, un SISO si ha quando l'ingresso ,che causa la risposta forzata del sistema e la traiettoria forzata delle sue variabili di stato, è unico.

Indicati con:

$u(t) \in R^m$ il vettore delle variabili di ingresso;

$x(t) \in R^n$ il vettore delle variabili di stato;

$y(t) \in R^p$ il vettore delle variabili di uscita;

$f(t)$ e $g(t)$, due funzioni vettoriali, le cui proprietà classificano i sistemi;

un sistema dinamico a tempo continuo è definito dalle seguenti relazioni costitutive:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t) \rightarrow \text{equazione di stato} \\ y(t) = g(x, u, t) \rightarrow \text{trasformazione di uscita} \\ x(t_0) = x_0 \rightarrow \text{stato iniziale del sistema} \end{cases}$$

Il numero n delle variabili di stato definisce l'ordine del sistema.

- L'equazione differenziale, nota come equazione di stato, pone l'ingresso $u(t)$ in relazione con le variabili che descrivono la situazione interna del sistema, dal punto di vista energetico, e definisce l'evoluzione dello stato $x(t)$ per $t > 0$, in corrispondenza dell'istante iniziale t_0 , della "condizione iniziale" $x(t_0) = x_0$ e della funzione di ingresso $u(t)$ definita per ogni $t \geq t_0$. La funzione $x(t)$ per $t \geq t_0$ si dice movimento dello stato del sistema e come per la risposta y , è possibile identificare la componente propria del sistema e quella indotta dal sistema sollecitante (l'ingresso o variabile forzante).

- L'equazione algebrica, detta trasformazione di uscita, consente di determinare l'uscita $y(t)$ a uno specifico istante di tempo sulla base della conoscenza della situazione interna del sistema e dell'ingresso allo stesso istante di tempo, ovvero permette di determinare l'evoluzione della uscita $y(t)$ per $t \geq t_0$, in corrispondenza della funzione $u(t)$ e dell'andamento dello stato $x(t)$ per $t \geq t_0$. La funzione $y(t)$ per $t \geq t_0$ è conosciuta col nome di movimento dell'uscita. L'equazione di stato e la trasformazione di uscita costituiscono una rappresentazione di stato, o rappresentazione [ingresso,stato,uscita], o rappresentazione interna di un sistema dinamico a tempo continuo. Si parla anche di rappresentazione nello spazio degli stati. E' importante sottolineare sempre la parola "continuo" perché le equazioni differenziali diventano equazioni alle differenze finite nel caso di un sistema ad eventi a tempo discreto (detto anche SED).

INTRODUZIONE

1.1 Generalità

Come già definiti, i sistemi Single Input Single Output (i sistemi SISO), lineari, stazionari e a parametri concentrati sono descritti da un modello ingresso-uscita: tale modello consiste in una equazione differenziale ordinaria e lineare a coefficienti costanti. Dunque vi è un solo ingresso sollecitante, per volta, e dunque il gruppo di frequenze libere del sistema considerato che assume la dimensione in base alla complessità del sistema (banalmente torniamo all'ordine del sistema, ma vi sono anche dei modi che possono essere introdotti dall'ingresso sollecitante, che comunque non sono radici del Polinomio in s , variabile di Laplace). In realtà possiamo dedurre l'ordine in base al numero di componenti in grado di immagazzinare energia. Si pensi ad un circuito RLC nelle sue versioni, serie e parallelo. Peccato esistano le cosiddette situazioni patologiche. Esiste però un Teorema che può aiutare in questa valutazione e che viene enunciato perché sarà sulla base dell'analisi circuitale.

“Quando la rete elettrica non contiene i casi in cui si abbiano condizioni patologiche, ossia percorsi chiusi (maglie) di soli generatori di tensione e condensatori, o co-cicli di soli generatori di corrente e induttori, allora le variabili di stato sono meno discontinue dell'ingresso. Quando si applica un ingresso che ha nell'istante iniziale una discontinuità di prima specie, le variabili di stato si conservano, cioè non cambiano tra 0^- e 0^+ : sono funzioni continue”.

1.2 Risposta a regime ad un ingresso sinusoidale

Si consideri un sistema SISO lineare e stazionario avente funzione di trasferimento trasformata con Laplace $G(s)$ con poli tutti a parte reale negativa, ossia asintoticamente stabile. Si supponga che tale sistema venga eccitato a partire dall'istante di tempo $t = 0$ da un segnale di tipo sinusoidale avente pulsazione $\omega \in [0, +\infty)$ e ampiezza U : $u(t) = U \sin(\omega t)$. Siano $G(\omega)$ e $\varphi(\omega)$ rispettivamente, il modulo e la fase della funzione di trasferimento $G(s)$ valutati in $s = j\omega$ (modulo e fase di un numero complesso del Piano di Gauss). Ci stiamo spostando sull'asse immaginario per valutare le frequenze fisiche del sistema. In condizioni di regime la risposta di tale sistema $y(t)$ è anch'essa un segnale di tipo sinusoidale avente la stessa pulsazione del segnale in ingresso, modulo pari al prodotto “ $|G(j\omega)|U$ ” e il cui sfasamento rispetto al segnale in ingresso è pari a $\varphi(\omega)$, ossia :

$$y_r(t) = G(\omega)U \sin(\omega t + \varphi(\omega)).$$

Si omette la dimostrazione perché di scarso rilievo.

Il significato fisico attribuito alla $G(j\omega)$ nel caso dei sistemi con poli a parte reale negativa suggerisce anche un metodo per la sua determinazione sperimentale. In questo caso infatti è sufficiente applicare in ingresso al sistema un segnale sinusoidale, aspettare che l'uscita vada a regime, e quindi determinare il rapporto tra l'ampiezza del segnale in uscita e quella del segnale in ingresso nonché lo sfasamento tra i due. Ripetendo questa operazione con diversi segnali sinusoidali in ingresso, caratterizzati da diversi valori della pulsazione, si risale all'andamento del modulo e della fase della risposta armonica nel campo delle pulsazioni di interesse.

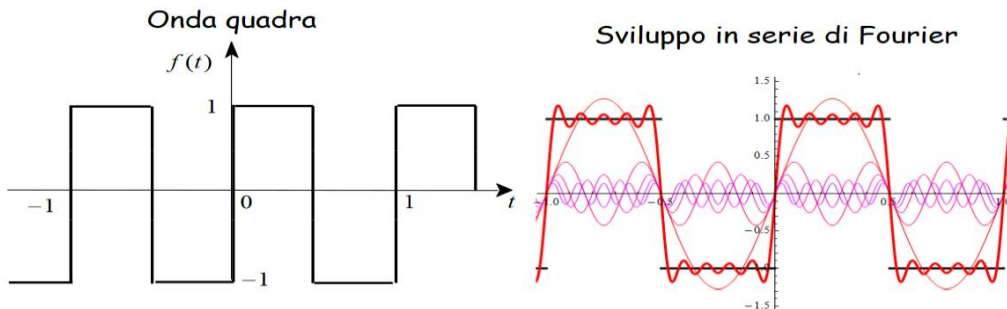
Avendo, dunque, sollecitato il sistema con diverse pulsazioni, tale metodo suggerisce una possibile trattazione del concetto di risposta Armonica anche con classi di segnali rappresentabili in Serie di Fourier e tramite la Trasformata di Fourier.

Ricordando che un qualunque segnale periodico è sempre rappresentabile come:

$$u(t) = S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right)$$

con $S(t)$ Serie di Fourier di $u(t)=u(t-T)$ e T periodo del segnale periodico u .

Un esempio principe per l'Elettronica Industriale di Potenza e Automazione Industriale è proprio l'onda quadra, ad esempio per un full-bridge per la conversione dell'energia elettrica nella direzione dettata dal flusso di potenza, a seconda della situazione, frenata o accelerazione.



$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2i+1)} \sin(2i+1)\omega t$$

Essendo una funzione dispari sono nulle la componente costante (il valor medio) e tutti i coefficienti dei termini in coseno.

La trattazione non si occuperà dei criteri di convergenza perché la serie è illustrata solo a titolo informativo.

Cenni essenziali sui sistemi LTI

2.1 Introduzione al problema nel dominio della frequenza

Sapendo che un sistema, sempre e comunque **dinamico lineare stazionario**, anche detto **sistema lineare tempo-invariante** o **sistema LTI**, è un sistema dinamico lineare tempo-invariante, soggetto cioè al principio di sovrapposizione degli effetti: per esso vale il principio di traslazione causa-effetto nel tempo, cioè **il sistema risponde sempre con lo stesso effetto ad una data causa, a prescindere dall'istante di tempo in cui tale causa agisca sul sistema**. Allora possiamo pensare che sollecitandolo tramite un ingresso sinusoidale, ogni volta ad una frequenza differente, sarà possibile ottenere diversi punti del diagramma di Bode della sua Risposta Armonica. Tramite alcune basilari nozioni di Teoria dei Sistemi LTI è possibile pensare di progettare un Trasduttore. La trasduzione di una grandezza fisica consiste nell'acquisizione di un INPUT con una certa unità di misura e la restituzione in OUTPUT della stessa, ma convertita tramite l'analisi dimensionale regalata dal Sistema Internazionale, in un'altra unità di riferimento. In realtà tale dispositivo non si occuperà di trattare alcuna grandezza con unità di misura, ma saranno tutte adimensionali. Accetterà in input un vettore di pulsazioni e di risposte nel dominio del tempo (le cui grandezze di ampiezza e fase rimarranno inalterate spostandoci nel dominio della frequenza). Tramite un metodo denominato "Metodo della Pendenza Finale del Diagramma di Bode", ispirato al significato geometrico di derivata, alla linearizzazione in sé e al metodo monostep, alle differenze finite, del primo ordine e il più noto e semplice fra tutti, detto metodo di Eulero-Cauchy, sarà possibile identificare l'ordine del sistema, con una certa tolleranza, applicando il metodo appena citato al diagramma di Bode del modulo del segnale $W(s)$, nonché della risposta armonica valutata su diverse frequenze, ossia quelle stesse "mandate in pasto" al sistema che, essendo stabile, dopo un transitorio determinato dalle sue costanti di tempo (inversi delle frequenze libere), sarà possibile osservare un segnale sinusoidale "pulito".

Tramite la determinazione dell'ordine del sistema che viene preso in esame e risponde, verrà costruito un sistema lineare e verrà osservato il problema essere mal posto. Il caso *sovradeterminato* si verifica quando il sistema è stato sovravincolato - cioè quando le equazioni superano in numero le incognite. Al contrario, il caso *sottodeterminato* si verifica quando il sistema è stato sottovincolato - cioè, quando il numero di equazioni è inferiore al numero di incognite.

2.2 Sistemi lineari

Di seguito un breve background sui sistemi lineari e il rango della matrice dei coefficienti, analizzandolo anche dal punto di vista della Teoria dei Sistemi.

Sia $Ax=b$ un sistema lineare che in forma matriciale risulti:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

In particolare:

- la matrice dei coefficienti del sistema o matrice incompleta: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Il vettore delle soluzioni: $x \in \mathbb{R}^n$
- Il vettore dei termini noti: $b \in \mathbb{R}^m$
- $B=[A|b]$ la matrice A aumentata con il vettore dei termini noti: $B \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$

Si affrontano i diversi casi.

- (i) Sia $Ax=b$ un sistema di equazioni lineari (n -equazioni in n -incognite) e dunque $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice quadrata e i vettori $x, b \in \mathbb{R}^n$;

è noto che se $\det(A) \neq 0$, allora il sistema $Ax=b$ ammette **una e una sola soluzione** data da: $x=A^{-1}b$: applicazione lecita del Teorema di Cramer per la risoluzione del sistema quadrato. Applicazione lecita, ma non la più efficiente! Infatti abbiamo una soluzione che ci evita il calcolo dei determinanti e che evita il noioso metodo dei Cofattori per l'inversione della matrice.

Sapendo che $AA^{-1}=I$ (matrice identità), allora se poniamo il sistema in maniera differente dal solito, otteniamo:

$$A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_n \end{bmatrix},$$

dove $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ è l' i -esima colonna della matrice identità (o l' i -esimo versore della base canonica). Allora possiamo vedere tutto come:

$$Ax_i = e_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

le colonne di A^{-1} possono essere calcolate mediante la fattorizzazione LU e la risoluzione di n coppie di sistemi triangolari, con complessità $O(\frac{4}{3}n^3)$.

Si noti che la fattorizzazione LU, con pivoting parziale, può essere sfruttata direttamente per calcolare la soluzione: l'illustrazione intende soltanto sottolineare che i cofattori sono l'ultimo carro da prendere in considerazione.

Si illustra una situazione della Teoria dei Sistemi con tale caso.

Dato un sistema lineare autonomo $x'(t) = Ax(t)$, lo stato x_e è un punto di equilibrio se e solo se è soluzione del sistema lineare omogeneo $Ax_e = 0$.

“Un sistema lineare omogeneo ammette sempre la soluzione banale”

Da ciò derivano immediatamente i seguenti risultati.

- Se la matrice A è non singolare, l'unico stato di equilibrio del sistema è $x_e = 0$ ossia l'origine.
- Viceversa, se A è singolare allora il sistema ha un numero infinito di stati di equilibrio che descrivono uno spazio lineare: sono tutti i punti contenuti nello spazio nullo di A . Un sistema lineare autonomo non può pertanto avere stati di equilibrio isolati (siano essi in numero finito o infinito), come invece è possibile nel caso dei sistemi non lineari.

- (ii) Un sistema di equazioni lineari $Ax=b$ (m -equazioni in n -incognite) ammette soluzioni se e solamente se il $r(A)=r(A|b)$. Si parla di rango di una matrice e si tratta il caso matriciale esposto sopra. Si chiama rango di una matrice, i cui elementi non siano tutti nulli, l'ordine massimo dei suoi minori non nulli. Il rango per righe della matrice A è il massimo numero di righe/colonne linearmente indipendenti. Si dimostra in generale che il rango per righe coincide con il rango per colonne.

- (iii) Nel caso di un sistema con matrice a rango pieno in cui $m>n$ allora sono disponibili più equazioni che incognite per cui il problema potrebbe non avere soluzioni. E' lecito sfruttare delle caratteristiche note del fenomeno rappresentato dal sistema e procedere con

l'identificazione mediante i minimi quadrati, servendosi del concetto di Varianza Sperimentale proveniente dalla Statistica:

$$s(a_n) = \sum_{n=1}^m (a_n - \mu)^2;$$

in cui il valor medio delle m misurazioni fatte sulla variabile aleatoria a sarà:

$$\mu = \bar{a} = \frac{1}{N} \sum_k^N a_k.$$

Con l'assunzione che $r(A) = \min(m, n) = n$, allora è possibile costruire il sistema lineare. Un approccio del genere può essere visto anche facendo riferimento ad un sistema LTI del secondo ordine:

$$G(i\omega) = \frac{k}{a_2(i\omega)^2 + a_1i\omega + 1}$$

In cui k è il Guadagno di Bode, la $G(i\omega)$ è la funzione di trasferimento del sistema in forma di Bode con la variabile di Laplace privata della sua parte reale. I dettagli delle motivazioni dello spostamento sull'asse immaginario derivano dal Teorema di Cauchy e dal Teorema della Deformazione del dominio in campo complesso. Essi riguardano forme differenziale in campo complesso e concetti molto simili a quelli in campo reale che trovano applicazione in branche della fisica come Elettromagnetismo per la determinazione della funzione Potenziale di un campo Vettoriale.

Banalmente, si calcolano il modulo $|G(i\omega)|$ e fase $\arctan \frac{\text{Im}G(i\omega)}{\text{Re}G(i\omega)}$ del numero complesso $G(i\omega)$ e si rappresenta il numero in forma esponenziale dalla formula di Eulero. Si passa alla varianza sperimentale in cui vediamo la somma delle due varianze singole:

$$J(a_1, a_2) = \sum_{k=1}^N \left(M(\omega_k, a_1, a_2) - \hat{M}_k \right)^2 + \sum_{k=1}^N \left(\varphi(\omega_k, a_1, a_2) - \hat{\varphi}_k \right)^2$$

$$J(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \min \left\{ J(a_1, a_2) \right\}$$

Il termine $M(\omega_k, a_1, a_2)$ denota il modulo corrispondente alla pulsazione relativa alla k-esima misura e il termine \hat{M}_k denota il modulo che ci si aspetta a tale pulsazione, ossia da misure note o valori tabellati relativi al modello del motore in corrente continua. Tale schema vi è anche per la fase. Tale identificazione ai minimi quadrati può essere applicata alle "blackbox" che hanno un comportamento ingegneristico noto.

In questa espressione il termine noto del polinomio è unitario perché lo impone la forma stessa (è un "contrario" della classica forma monica che è usata per la matrice A in forma compagna, molto utile per l'osservabilità del sistema LTI).

Il caso contrario, quello sottodeterminato, sarà quello con $m < n$ in cui le soluzioni potrebbero essere infinite poiché vi sono più incognite che equazioni e dunque è possibile trovare delle soluzioni in funzione di un parametro a cui dare dei valori per osservare le soluzioni tipo.

Il caso sovradeterminato sarà proprio quello trattato dal Trasduttore di ordine del sistema LTI che, tuttavia, non si occuperà di risolvere il sistema lineare conseguente, ma la trattazione della matrice rettangolare ottenuta e fattorizzata tramite fattorizzazione QR verrà effettuata da uno script esterno. Entrambi i programmi saranno scritti in linguaggio c++.

Dal punto di vista dell'Automatica si può dire con certezza che, in pratica, è essenziale studiare i sistemi lineari perché la loro importanza è enorme nel caso di approssimazioni locali di sistemi non lineari e in prossimità di condizioni di funzionamento nominali.

2.3 Assunzioni di lavoro sul sistema dinamico

Il diagramma di Bode costituisce senza dubbio la maniera più usata e popolare, forse in voga, per rappresentare la risposta armonica associata ad una data funzione di trasferimento. Tale diagramma parte dalla rappresentazione della funzione in coordinate polari. In ascissa ai diagrammi di Bode viene posta la pulsazione espressa in scala logaritmica decimale. Tale scelta è dettata dall'esigenza di avere una rappresentazione compatta della funzione nel dominio della frequenza. L'impiego di una scala logaritmica consente infatti di rappresentare più agevolmente grandezze che sono suscettibili a variazioni molto ampie, in quanto porta ad una contrazione dei valori elevati e ad una espansione dei valori più bassi, come diretta conseguenza dalla funzione trascendentale: logaritmo in base 10. Il diagramma di Bode del modulo presenta in ordinata il modulo della funzione complessa espresso in decibel:

$$M(\omega) = 20 \log |G(i\omega)|^{10}.$$

È importante, ai fini della formalità della Teoria dei Sistemi, ribadire sotto quali ipotesi si compone il nostro sistema lineare. Il sistema Single Input Single Output riceverà, di volta in volta, un ingresso sinusoidale che determinerà, alla frequenza considerata, la forma d'onda che il sistema restituirà in uscita una volta esaurito il transitorio di risposta. Il sistema sarà senza radici del Numeratore della funzione di trasferimento che è sempre rappresentabile come quoziente di polinomi. Si tratta di un caso senza zeri. Gli zeri danno contributo positivo nel diagramma dei moduli e, senza entrare nello specifico, ogni zero contribuisce di +20 decibel a decade. La questione "inverte di segno" per i poli, radici del Denominatore della funzione di trasferimento, detti anche frequenze libere del sistema o autovalori del polinomio caratteristico, danno contributo negativo per i moduli.

Un esempio di situazione che il nostro diagramma generico non dovrebbe presentare:



Si noti che la curva subisce inflessioni.

Non è importante far riferimento alle fasi, quanto precisare che si parla di Diagrammi Asintotici e non reali. Infatti tali relazioni, a livello di contributo in modulo della Funzione di Trasferimento al variare della pulsazione, sono state ricavate tramite l'operazione di limite. Dunque, come per i concetti riguardanti la linearizzazione, è possibile trascurare gli ordini superiori dello sviluppo del differenziale di una funzione (incremento infinitesimale) solo se i termini sono trascurabili. Facendo riferimento a queste funzioni trattate nel dominio della frequenza e compresse tramite logaritmo, allora non vi devono essere troppi flessi. In maniera poco formale, si può ritenere accettabile la linearizzazione del diagramma asintotico solo se non vi sono fenomeni non lineari, ad esempio in alta frequenza o rumore bianco o rumore di misura. Senza trattare tali fenomeni, nel nostro caso verrà trattata una tolleranza entro cui spingerci.

Il metodo delle “Metodo della Pendenza Finale del Diagramma di Bode” non è un enunciato formale, ma una conseguenza della natura della Teoria dei Sistemi e degli strumenti differenziali. Il limite del rapporto incrementale può essere approssimato dal rapporto stesso, dunque il concetto di fondo sarà proprio questo: ci permetterà di identificare l'ordine del sistema in base al numero di poli che daranno contributo. Vi è verificata l'assenza totale di zeri. Questa assunzione evita il problema di Interpolazione di Funzione o Approssimazione di Funzione.

All'inizio, il progettista deve scegliere quali Algoritmi usare e il focus sul problema ha rivelato cosa fosse necessario: i calcoli stessi lo dicevano!

Ai fini illustrativi, si mostra come ricavare la relazione che consentirà di dedurre l'ordine del sistema senza zeri. Un sistema di tale caratteristica è sempre notevole per l'Ingegneria Elettrica, basti pensare ad un motore in corrente continua, ad un braccio meccanico, ad un filtro passa basso o al modello reale della Bobina elettrica.

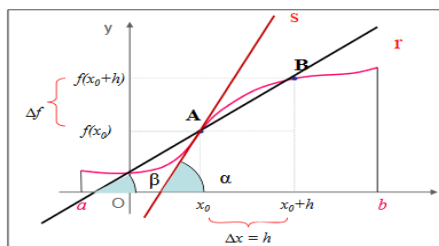
2.4 Metodo della Pendenza Finale del Diagramma di Bode

Il metodo si basa sulla possibilità di approssimare la tangente ad una curva, in un certo punto del sostegno, tramite la secante i due punti in cui è stata incrementata la curva lungo la traiettoria scelta dalla parametrizzazione applicata.

Formalmente, ci possiamo riferire al seguente disegno:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$m = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$



Infatti non potrà mai sussistere l'identità: $\tan(\alpha) = \tan(\beta)$.

A differenza del Metodo di Eulero Cauchy non viene definito un passo di discretizzazione perché il sistema deve essere osservato dal punto di vista della sua natura e dunque le frequenze devono variare, ma senza una logica dietro le quinte.

$$n = \frac{|M_m - M_{m-1}|}{\frac{w_m}{w_{m-1}} 20} 10$$

E' immediato notare la presenza di un rapporto incrementale definito su una scala semilogaritmica. La presenza del coefficiente 20 è dovuto al discorso fatto sul contributo in frequenza ad ogni decade. Ovviamente il segno del contributo non è significativo. Su un set di 10 misure, m=10 e le pendenze calcolate dal programma saranno 9, di cui solo l'ultima sarà realmente usata. Le altre sono utili per vedere come evolve il grafico dal punto di vista del diagramma asintotico del modulo della risposta in frequenza del sistema.

2.5 La composizione del sistema lineare

Dal punto di vista matematico, per arrivare alla forma finale del sistema lineare e alla forma più compatta, sarà necessario servirsi di alcuni accorgimenti. Per prima cosa partiamo dalle ipotesi di lavoro. Essendo la funzione di trasferimento sempre parametrizzabile in forma di Bode nel modo seguente:

spostandoci nuovamente nell'asse immaginario per valutare la funzione di trasferimento al variare della pulsazione, otteniamo:

$$s = j\omega$$

$$G(j\omega) = K' \frac{(j\omega)^m + \sum_{i=0}^{i=m-1} b_i(j\omega)}{(j\omega)^n + \sum_{i=0}^{i=n-1} a_i(j\omega)^i} = K \frac{(j\omega)^k \prod_{i=1}^{m_1} (1 + j\omega \mu_i) \prod_{i=1}^{m_2} \left(1 + 2\zeta_i \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + \left(\frac{j\omega}{\omega_{n_i}}\right)^2\right)}{(j\omega)^v \prod_{i=1}^{n_1} (1 + j\omega \tau_i) \prod_{i=1}^{n_2} \left(1 + 2\xi_i \frac{j\omega}{\omega_{n_i}} + \left(\frac{j\omega}{\omega_{n_i}}\right)^2\right)}$$

Dove il termine K' è denominato guadagno alle alte frequenze.

Con l'ipotesi assolutista sull'assenza di zeri, abbiamo dunque un numeratore unitario o al più con un guadagno non unitario. Il numero complesso al primo membro sarà denotato in seguito come il reciproco di sé stesso, questo sulla base di quanto detto finora. Il reciproco di un numero complesso suppone un cambio di segno per la sua fase.

Dunque si può procedere scrivendo in forma matriciale il secondo membro, a partire dalla matrice di **Vandermonde** che possiamo osservare nascere per logica ricorsiva di elevazione a potenza dell'unità immaginaria.

La matrice relativa ai coefficienti nella variabile di Laplace con s=i ω. Per ciascun valore di ω ∈ [ω₁, ω_m] vi sarà un'equazione associata del polinomio caratteristico e dunque, in gioco, un confronto dettato da un'uguaglianza tra il corrispondente secondo membro P(iω) con il primo membro $\frac{1}{G(i\omega)}$:

k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5		k=j ...	k=n+1
1	$i\omega 1$	$-(\omega 1)^2$	$-i(\omega 1)^3$	$(\omega 1)^4$
..
1	$i\omega m$	$-(\omega m)^2$	$-i(\omega m)^3$	$(\omega m)^4$

In termini tecnici, si ha una matrice complessa di Vandermonde: $S \in \mathbb{C}^{m \times (n+1)}$. La motivazione sul $n+1$ è relativa al termine noto. Ai fini della risoluzione del sistema lineare non è importante ribadire che l'incognita a_0 sia sempre unitaria, dunque la considereremo in generale non nota ai fini estetici di rappresentazione, senza contrastare ciò che impone la forma di Bode su cui si costruisce il diagramma stesso: ormai l'ordine è già stato determinato! Si poteva pensare di sfruttare comunque un'altra forma, detta poli-zeri:

$$G(i\omega) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)}$$

Si noti sempre l'assenza degli zeri anche in tale notazione (semplice produttoria che compone in forma compatta il polinomio). Per la Regola di Cartesio: condizione necessaria e sufficiente affinché le radici del polinomio di secondo grado $P(s) = a_2(s)^2 + a_1s + a_0$ abbiano tutte parte reale negativa è che i coefficienti a_i , $i = 0, 1, 2$, siano tutti dello stesso segno. Questo è utile ai fini di un sistema del secondo ordine. Purtroppo la condizione diventa solo sufficiente per sistemi oltre il secondo ordine (e quindi polinomi di secondo grado).

Il vettore delle incognite:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Il vettore delle incognite rappresenta i coefficienti dei termini nella variabile di Laplace del polinomio caratteristico, con cui si identifica in maniera univoca la risposta libera del sistema. Il vettore dei termini noti in forma polare e rettangolare (trigonometrica o algebrica di un numero complesso $z = a + ib$): $\Psi(i\omega) \in \mathbb{C}^m$

$$\Psi(i\omega) = \begin{bmatrix} |\Psi(i\omega 1)| e^{-i\phi_1} \\ \dots \\ |\Psi(i\omega m)| e^{-i\phi_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\Psi(i\omega 1)| \cos(\phi_1) - i \sin(\phi_1) \\ \dots \\ |\Psi(i\omega m)| \cos(\phi_m) - i \sin(\phi_m) \end{bmatrix}$$

Il sistema lineare può scindersi in due sistemi lineari applicando ambo i membri gli operatori Re e Im con cui estrarre la parte reale ed immaginaria dei numeri complessi che vengono fuori svolto il prodotto matrice-vettore ed eseguito il confronto con il primo membro.

Un esempio di sistema lineare conseguente dalla risposta in frequenza di un motore in corrente continua che viene calcolato dal Trasduttore di ordine di Sistema LTI potrebbe essere il seguente:

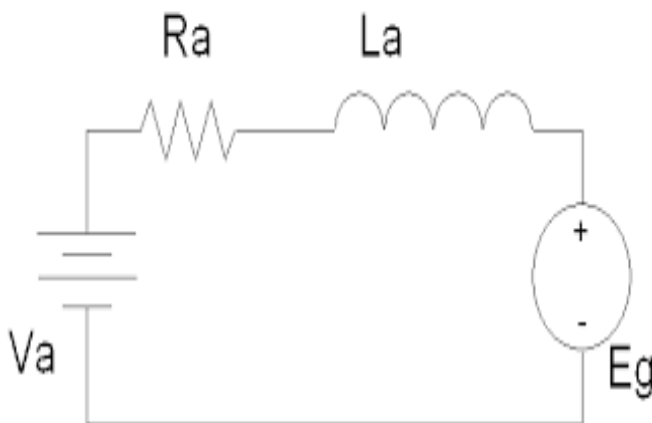
-sistema lineare delle equazioni sotto operatore reale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.01 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -25 \\ 1 & 0 & -100 \\ 1 & 0 & -400 \\ 1 & 0 & -2500 \\ 1 & 0 & -10000 \\ 1 & 0 & -40000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.51266 \\ 2.50619 \\ 2.61463 \\ 2.29183 \\ 1.96345 \\ -0.40952 \\ -14.8449 \\ -72.7919 \\ -500.0000 \end{pmatrix}$$

-sistema lineare delle equazioni sotto operatore immaginario:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.15808 \\ 0.39694 \\ 0.77746 \\ 1.66546 \\ 3.09391 \\ 6.52739 \\ 20.5074 \\ 53.0808 \\ 0.08726 \end{pmatrix}$$

a cui è associato il modello matematico seguente:



$$\begin{aligned} v_e(t) &= R_e i_e(t) + L_e \frac{di_e(t)}{dt} \\ v_a(t) &= R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e(t) \\ C_m &= B \omega(t) + J \frac{d\omega(t)}{dt} \\ e(t) &= k_1 i_e(t) \omega(t) \\ C_m(t) &= k_2 i_e(t) i_a(t) \end{aligned}$$

Le grandezze v_a, i_a, R e L rappresentano rispettivamente tensione, corrente, resistenza ed induttanza del circuito elettrico di statore o d'armatura comprensivo dell'induttanza di spianamento. Un motore in DC alimentato con una tensione v_a genera per accoppiamento magnetico tra gli avvolgimenti di statore e rotore una coppia elettromagnetica $T_{em}(t)$ che consente di mettere in rotazione l'albero della macchina ad una velocità $w(t)$.

Nel caso trattato sono state effettuate ben nove misurazioni di risposte in frequenze allo stesso ingresso sinusoidale che, di volta in volta, ha assunto nove valori differenti di pulsazione crescente (si è allargato nell'asse delle ascisse dal punto di vista del dominio in ωt).

In questo caso banale il modello matematico del sistema LTI, a guadagno di Bode unitario, avrebbe i seguenti coefficienti approssimati:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.167 \cdot 10^{-2} \\ 8.3 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Dal punto di vista dell'Automatica è possibile notare che il terzo coefficiente del polinomio caratteristico ha un valore molto piccolo ed è possibile applicare una approssimazione a modo dominante: in questo corso non ci si preoccupa di tale fatto poiché di scarso interesse.

E' interessante notare che in questa branca di sistemi lineari è sempre conveniente procedere in questa maniera: prendere in ingresso $u_k(t) = A \sin(w_k t)$ e calcolare la conseguente:

$$y_k(t) = U |G_{(iw_k)}| \sin(w_k t + \phi(w_k))$$

Da qui ricavare modulo e fase del numero complesso $|G(jw_k)|$ e, una volta ottenuta la forma rettangolare dello stesso e la matrice di Vandermonde, applicare ambo i membri gli operatori Re ed Im ed applicare il principio di equivalenza di un numero complesso. Quello che poteva essere un problema di interpolazione o approssimazione di funzioni può essere ridotto in questa maniera solo conoscendo valori tipici di modulo e fase del numero complesso e dunque i valori medi di tali. I risultati riportati sopra sono stati ottenuti tramite un'identificazione ai minimi quadrati. Questo modo di operare, tramite minimi quadrati, è stato molto importante per il corso di Algoritmi Numerici e Applicazioni. Tramite la fattorizzazione QR della matrice dei coefficienti è stato possibile riscrivere il sistema delle equazioni normali.

Fattorizzazioni della matrice A (e non solo)

3.1 Generalità sulle fattorizzazioni

Una qualsiasi matrice A può essere scomposta nel prodotto di due particolari matrici, cioè fattorizzata: ad esempio si può scomporre nel prodotto di una matrice triangolare inferiore e di una seconda matrice triangolare superiore (fattorizzazione LU), o anche nel prodotto di una matrice ortogonale e di una matrice triangolare superiore. Quest'ultima costituisce la fattorizzazione QR della matrice A ($A=QR$) e si può vedere che tale fattorizzazione si rivela particolarmente utile ed efficiente nella risoluzione di alcuni problemi nell'analisi numerica. In particolare, se la matrice A di partenza ha dimensioni $m \times n$, la fattorizzazione QR produrrà una matrice Q di dimensioni $m \times m$ e una matrice R di dimensioni $m \times n$. La matrice Q è ortogonale, con la seguente proprietà: $Q^t Q = I$ cioè la sua inversa è pari alla sua trasposta, dato che il prodotto delle due restituisce l'identità; questa proprietà è importante in quanto normalmente il calcolo dell'inversa di una matrice non è banale, e non è sempre possibile in quanto la matrice di partenza potrebbe essere singolare. Al contrario, trovare l'inversa di una matrice ortogonale è particolarmente semplice in quanto richiede solo di considerare la sua trasposta, senza effettuare calcoli. Ne consegue anche che l'inversa di una matrice ortogonale esiste sempre: ciò è confermato anche dal fatto che il suo determinante può assumere solo i valori 1 e -1, quindi si ha sempre $\det Q \neq 0$. Come già accennato, la matrice R è triangolare superiore. La fattorizzazione QR può essere ottenuta in diversi modi: uno dei metodi più famosi fa uso delle matrici di Givens, ma esiste anche un altro metodo che utilizza le matrici di Householder, ed è proprio con quest'ultimo metodo che si illustrerà come calcolare la fattorizzazione QR. Qui di seguito si analizzerà l'utilità di tale fattorizzazione per la risoluzione di sistemi lineari, ad esempio tutti quelli che derivano da LTI di ordine elevato.

3.2 Introduzione al problema

La fattorizzazione QR di una generica matrice A non singolare (di dimensioni $m \times n$, con $m > n$) permette di risolvere il sistema $Ax=b$ tramite la risoluzione di due sistemi più semplici:

$$\begin{cases} Qc = b \\ Rx = c \end{cases}$$

dove dal primo sistema, essendo Q una matrice ortogonale, si ricava la soluzione intermedia c : $c = Q^t \cdot b$ trovata c , essa si utilizza come vettore dei termini noti nel secondo sistema: $Rx=c$ con R matrice triangolare superiore, ricavando la soluzione finale x , che è la soluzione del sistema $Ax=b$ di partenza. Si preferisce questo approccio, nonostante i sistemi da risolvere siano due e non più uno, in quanto il calcolo di Q^t è immediato (non richiede al calcolatore l'esecuzione di somme e prodotti), richiedendo solo $O(n^2)$ operazioni per la risoluzione del primo sistema, mentre il secondo sistema si risolve per sostituzione all'indietro, che richiede $O\left(\frac{n^2}{2}\right)$ operazioni. La risoluzione del sistema con un minor numero di operazioni comporta due vantaggi:

- ogni operazione eseguita introduce errore, perciò un minor numero di operazioni introducono un errore più piccolo;
- ogni operazione richiede un certo tempo per poter essere eseguita dal calcolatore, perciò un minor numero di operazioni riduce il tempo di esecuzione totale, velocizzando il calcolo stesso.

Nonostante la fattorizzazione QR richieda un numero doppio di operazioni rispetto alla fattorizzazione LU (cioè rispetto all'algoritmo di Gauss), la fattorizzazione QR è preferita rispetto alla fattorizzazione LU per via della maggiore stabilità. Infatti nella fattorizzazione QR il numero di condizionamento rimane invariato:

$$k_2(A) = k_2(R)$$

ciò rende la fattorizzazione QR particolarmente utile nella risoluzione dei sistemi malcondizionati, a differenza della fattorizzazione LU dove il numero di condizionamento può crescere.

3.3 Matrici di Householder

La fattorizzazione QR di Householder è focalizzata sulla determinazione delle matrici elementari di Householder. Una matrice elementare di Householder è una matrice del tipo: $H = I - 2ww^T$, $w \in \mathbb{R}^n$, $\|w\| = 1$.

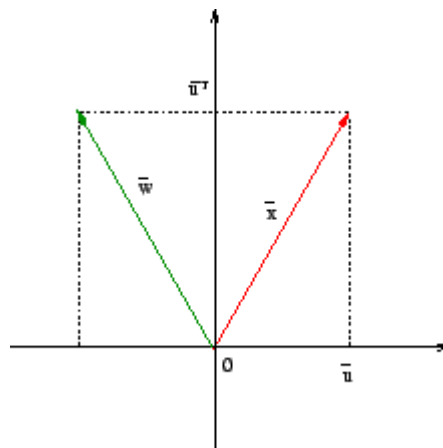
La matrice di Householder è per definizione:

- simmetrica, quindi sappiamo che $H=H^T$;

-è ortogonale, per cui $HH^t = I$

-è una matrice associata ad una riflessione, ogni vettore x moltiplicato per H viene riflesso rispetto al piano.

Di seguito una rappresentazione sul piano cartesiano con riflessione rispetto all'asse delle ordinate per chiarire il concetto:



Si può determinare un valore di w tale da fare in modo che la moltiplicazione a sinistra di questa matrice per un qualsiasi vettore di \mathbb{R}^n lo trasformi in un vettore parallelo al primo versore e_1 della base canonica, ossia: $Hx = ke_1$.

La determinazione analitica del vettore w e quindi della matrice di Householder H conduce alla definizione del seguente algoritmo:

1. $\sigma = \|x\|_2$
2. $k = -\text{sign}(x_1)\sigma$
3. $\lambda = \sqrt{2}\sigma(\sigma + |x_1|)$
4. $w = (x - ke_1)/\lambda$
5. $H = I - 2ww^t$

Si può esprimere la matrice H in una forma diversa che consente di ridurre gli errori e di scrivere un algoritmo modificato:

1. $\sigma = \|x\|_2$
2. $k = -\text{sign}(x_1)\sigma$
3. $\beta = \sigma(\sigma + |x_1|)$
4. $v = (x - ke_1)$
5. $H = I - 1/\beta * vv^t$

In MATLAB una traduzione “Algebra lineare->Italiano->Matlab” dei 5 passaggi potrebbe essere:

```
function [H] = MyHouseholder(x) %il vettore deve essere COLONNA
sigma=norm(x);
if x(1)<0
    k=sigma;
else
    k=-sigma;
end
beta=sigma*(sigma+abs(x(1)));
v=x;
v(1)=x(1)-k;
[b,a]=size(x);
H=eye(b)-(1/beta)*v*v';
end
```

3.4 Progettazione del software

Per implementare tale fattorizzazione è necessario usare un linguaggio comodo e un paradigma giusto. L'equazione della programmazione ad oggetti, usata per l'Ingegneria del Software, è la seguente:

$$OOP = ADT + POLIMORFISMO + EREDITARIETA'.$$

Per poterla implementare in un programma affinché un modulo implementi un ADT (Abstract Data Type) occorre che anche il principio di occultamento dell'informazione sia rispettato. Non è necessario far riferimento ad alcun pattern specifico per far ciò.

Per quanto concerne il polimorfismo alcuni linguaggi possiedono soltanto il meccanismo del dynamic binding (es. Python, CLOS e Smalltalk), altri utilizzano strategie miste (es. Java e C++ con metodi virtuali), mentre altri ancora utilizzano il binding statico (C++ senza metodi virtuali). Il dynamic dispatch, nel caso del c++, applica in sostanza una strategia mista, in cui parte dell'associazione tra operazione e metodo da invocare è svolta anticipatamente e parte al momento dell'esecuzione del programma. Questa strategia mista tipicamente implica l'utilizzo di vtable, in cui vengono inseriti puntatori/referenze alle varie alternative invocabili in runtime. Quindi la scelta del metodo da parte dell'oggetto chiamante verrà effettuata con tale approccio.

E' molto importante scegliere il linguaggio in base a ciò che si deve fare. Il c++ è assolutamente idoneo a trattare un'implementazione oop e procedurale, allo stesso tempo, di oggetti che vengono lanciati in metodi che, essenzialmente, si comportano come procedure e funzioni stile c per calcolo scientifico su vettori e matrici.

L'implementazione della classe principale vedrà diversi metodi che rappresenteranno il punto forte dell'incapsulamento dettato dagli ADT (non a caso sono gli Abstract Data Type). Avremo primitive di costruzione e distruzione degli oggetti.

Per quanto concerne gli errori di calcolo per la presenza di numeri con sviluppi decimali troncati, si useranno le norme matriciali delle matrici differenza composte dalla matrice originale A e la versione della stessa ma in forma fattorizzata (a prodotto matriciale svolto). Si può dimostrare che norme equivalenti definiscono distanze equivalenti e ciò è utile per metodi iterativi come il Metodo integrale delle approssimazioni successive che si appoggiano al Problema ai valori iniziali e al Teorema delle contrazioni di Banach per spazi completi, di Cauchy o, meglio precisamente, di Banach. Una sua applicazione verrà mostrata in seguito.

Uno sketch della dimostrazione potrebbe essere.

Hypothesis:

Siano $\|\cdot\|_1 : V \rightarrow [0, \infty]$ e $\|\cdot\|_2 : V \rightarrow [0, \infty]$ due norme e $d_1 : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ e $d_2 : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ le distanze ad esse associate. Le norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ si dicono equivalenti se esistono numeri reali $a, b > 0$ tali che

$$a\|X\|_1 \leq \|X\|_2 \leq b\|X\|_1, (\forall X \in V).$$

dim.

Equivalentemente:

$$b\|X\|_2 \leq \|X\|_1 \leq a\|X\|_2, (\forall X \in V).$$

Chiaramente la prima equazione equivale alla seguente proprietà':

$$a \cdot d_1(X, Y) \leq d_2(X, Y) \leq b \cdot d_1(X, Y), (\forall X, Y \in V)$$

e la seconda alla seguente:

$$b \cdot d_2(X, Y) \leq d_1(X, Y) \leq a \cdot d_2(X, Y), (\forall X, Y \in V).$$

Come dirette conseguenze delle definizioni di spazi metrici, metrica e norma.

Tale dimostrazione è stata enunciata perché si comprenda il motivo della vicinanza del residuo matriciale $\|A - QR\|$ calcolato con la norma infinito da quello calcolato con la norma uno.

3.5 Fattorizzazione $A=QR$ di Householder

Di seguito un breve scheduling dell'algoritmo di fattorizzazione della matrice A, prima nel caso quadrato e poi rettangolare.

Passo 0

$$A = A^{(1)} = [a_1^{(1)} \dots a_i^{(1)} \dots a_n^{(1)}]$$

A è considerata in termini di vettori colonna e si costruisce la prima matrice H.

$$H_1 a_1^{(1)} = k_1 e_1;$$

$$e_1 \in \mathbb{R}^n;$$

Passo 1

$$A^{(2)} = H_1 A^{(1)} = [a_1^{(2)} \dots a_i^{(2)} \dots a_n^{(2)}]$$

$$a_1^{(2)} = k_1 e_1 \quad \square \quad a_j^{(2)} = H_1 a_j^{(1)} \quad ; j=2, \dots, n.$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} k_1 & * & * & \dots & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & \dots & \dots \\ 0 & * & * & * & * & \dots \\ \dots & \dots & * & * & * & \dots \\ 0 & * & * & * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & (v_1)^t \\ 0 & A^{*(2)} \end{bmatrix}$$

$$\text{Sizeof}(A^{*(2)}) = (n-1)(n-1)$$

Passo 2

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} k_1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & (v_1)^t \\ 0 & A^{*(2)} \end{bmatrix}$$

$$H_2 a_2^{*(2)} = k_2 \cdot e_1;$$

$$H_2^{*(2)} \in \mathbb{R}^{(n-1)(n-1)};$$

$$e_1 \in \mathbb{R}^{n-1};$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} k_1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & (v_1)^t \\ 0 & H_2^{*(2)} A^{*(2)} \end{bmatrix}$$

$$H_2^{*(2)} A^{*(2)} \in \mathbb{R}^{(n-2)(n-2)}$$

Passo i

Predisposizione del passo i-1

$$A^{(i)} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} k_1 & * & * & * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_{i-1} & * & * & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{11}^{*(i)} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{nn}^{*(i)} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11}^{(i)} & A_{12}^{(i)} \\ 0 & A^{*(i)} \end{bmatrix}$$

$$H_i a_i^{*(i)} = k_i \cdot e_1;$$

$$e_1 \in \mathbb{R}^{n-i};$$

$$H_i^{*(i)} \in \mathbb{R}^{(n+1-i)(n+1-i)};$$

$$A^{(i+1)} = \begin{bmatrix} k_1 & A_{12}^{(i)} \\ 0 & H_i^{*(i)} A^{*(i)} \end{bmatrix}$$

Se A è quadrata, l'algoritmo termina al passo n-1.

Uno sketch dello scheduling analitico per la risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} Ax = QRx = b \\ Rx = c \\ C = Q^t \cdot b \end{cases}$$

$$R = A^{(n)} = H_{n-1} A^{(n-1)} = \prod_{j=1}^{n-1} H_{n-j} \cdot A_1 = Q^t \cdot A$$

Nel caso rettangolare si dovrà riempire di zeri la matrice R fino a raggiungere le dimensioni di A e ottenere la blocchizzazione seguente:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.5 Esempio di fattorizzazione del sistema lineare per un sistema LTI

In generale una matrice A costituita da potenze dell'unità immaginaria porterà ad alternarsi di posizioni con l'assenza e presenza della stessa. Dunque applicando gli operatori reale e immaginario ambo i membri, è possibile disaccoppiare il sistema in due sistemi lineari: A_p costituita dalle potenze pari che si accoppiano con il coseno della componente orizzontale del numero complesso al secondo membro;

viceversa per A_d costituita dalle potenze dispari con il seno.

Sulla base di tutte le osservazioni fatte in prossimità della scissione del sistema lineare, per la determinazione dei coefficienti della trasformata di Laplace del polinomio caratteristico del sistema LTI, è possibile ottenere per un singolo sistema per quattro sistemi lineari, di cui due da risolvere con l'approccio backward substitution. v_{Re} e v_{Im} sono i due vettori che rappresentano la parte reale e immaginaria di ciascun numero complesso e che quindi memorizzano ben k termini nel caso di k misurazioni dovute a k pulsazioni sollecitanti.

$$\begin{cases} v_{Re} = A_p x \\ v_{Im} = A_d x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_{Re} x = y_{Re} \\ R_{Im} x = y_{Im} \\ Q_{Re} \cdot y_{Re} = v_{Re} \\ Q_{Im} \cdot y_{Im} = v_{Im} \end{cases} \quad z = a + jb$$

Dove R_{Re} è la matrice triangolare proveniente dal primo sistema (quello reale) e y_{Re} i rispettivi termini noti.

3.6 Backword substitution

La sostituzione a ritroso è una procedura per risolvere un sistema di equazioni algebriche lineari $Ux = y$, dove U è una matrice triangolare superiore i cui elementi diagonali non sono uguali a zero. La matrice U può essere un fattore di un'altra matrice A nella sua decomposizione (o fattorizzazione) L U, dove L è una matrice triangolare inferiore. Questa decomposizione può essere ottenuta con molti metodi (ad esempio, il metodo di eliminazione gaussiana con o senza pivoting, lo schema compatto gaussiano, la decomposizione di Cholesky).

3.7 Sviluppo dei minimi quadrati con fattorizzazione A=QR

Di seguito i vari passaggi.

$\min_{x \in R^n} \|Ax - b\|_2^2 = \nabla \phi(x_1, \dots, x_n) = \nabla \|QRx - Ib\|_2^2$ è il punto di partenza.

Possiamo scrivere in maniera differente l'argomento della norma .

$$\|QRx - QQ^t b\|_2^2 = \|Q[Rx - c]\|_2^2 = \|Rx - c\|_2^2$$

Passando per le blocchizzazioni di R e $c=(c_1, c_2)$ avremo:

$\nabla [\|R_1 x - c_1\|_2^2 + \|c_2\|_2^2]$ che è la funzione da minimizzare. Anziché passare per una matrice Hessiana si avrà un'alternativa tale per cui

-si risolve $R_1 x = c_1$

-il minimo residuo è proprio c_2 .

Se $C_2=0$ la soluzione coincide con la soluzione classica. Se $C_2 \neq 0$ la soluzione coincide con quella dei minimi quadrati e la sua norma fornisce la misura del residuo. Se il problema è sovradeterminato troveremo soltanto un minimo diverso da 0, invece nel caso di un problema sottodeterminato i minimi sono più di uno e in generale si cerca x tale che $\|x\|_2$ sia minimo.

Dal punto di vista del Sistema delle equazioni normali (ortogonali), che si ottengono allo stesso modo, senza impiegare la fattorizzazione QR, vanno fatte alcune precisazioni:

$A^t Ax = A^t b$ è un sistema lineare e quadrato:

(i) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

(ii) $A^t \in \mathbb{R}^{n \times m}$

(iii) $A^t A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(iv) $b \in \mathbb{R}^n$

(v) $A^t b \in \mathbb{R}^n$

(vi) $k = \text{rank}(A^t A) = \min(n, m) = n \Rightarrow$ è non singolare

La matrice $A^t A$ è: quadrata e simmetrica \Rightarrow gli autovalori reali puri.

3.8 Fattorizzazione di Cholesky

Sia A una matrice quadrata, hermitiana e definita positiva su campo K ; tale matrice può essere decomposta come (applicazione alle equazioni normali):

$LL^t x = A^t b$ e il sistema prenderebbe la forma:

$$\begin{cases} L \cdot y = c \\ L^t \cdot x = y \end{cases}$$

Con complessità $O\left(\frac{2}{3}n^3\right)$.

Un'illustrazione dell'algoritmo che viene implementato in c++:

$$\begin{aligned} &\forall i = 1, \dots, m \\ &l_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}^2} \\ &\forall j = (i + 1), \dots, m \\ &l_{j,i} = \frac{1}{l_{i,i}} \left(a_{j,i} - \sum_{\iota=1}^{i-1} l_{j,\iota} l_{i,\iota} \right) \end{aligned}$$

Una serie di passaggi che è implementabile con qualche ciclo for.

Alcuni “perché” dei fatti

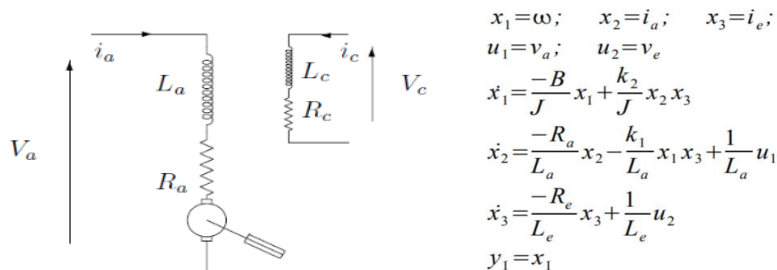
4.1 Conclusione del lavoro sui sistemi LTI

Un sistema è “un insieme di elementi che cooperano per svolgere una funzione altrimenti impossibile per ciascuno dei singoli componenti”. Una definizione troppo pulita per la realtà! L'ambiente sollecita il sistema, modificandone l'energia interna, e il sistema utilizza la sua energia interna per agire sull'ambiente, ma lo stesso sistema potrebbe nascondere delle insidie. Riconducendoci al modello di un motore in corrente continua, sappiamo che vi è un'induttanza e nella rappresentazione usata il modello standard di una bobina elettrica non rappresenta completamente i fenomeni in alta frequenza: c'è per forza un errore che è introdotto già da tale fatto. O meglio, ciò che si ottiene non rappresenta la realtà: filosoficamente parlando, basti pensare ad un drone che ha un programma su Eclipse che rappresenta il modello matematico e, alla fine, non si alza comunque in volo o non esegue la traiettoria voluta (potrebbe essere anche un problema di controllo per errori nella sintesi in omega).

Per la bobina elettrica, un modello più accurato include anche i fenomeni capacitivi in parallelo dovuti all'avvolgimento in spire di un conduttore isolato (anche negli impianti elettrici sono fatti tali accorgimenti perché quando si parla di sicurezza delle persone non si può sbagliare!). Questo è il motivo principale per cui un sistema potrebbe essere percepito con un ordine differente dalla sua natura.

4.2 Dimostrazione della non linearità di un motore in corrente continua

Si consideri il seguente circuito da cui scrivere le equazioni di stato del sistema nella rappresentazioni delle variabili di stato e privilegiando lo spazio delle fasi come spazio di stato:



La non linearità è dettata dal secondo termine del vettore di stato (derivato) con componenti rettangolari che inducono rotazioni, a livello geometrico.

4.3 Errori di stima del trasduttore di ordine di sistema LTI

Come ripreso più volte, il sistema lineare con cui risalire ai coefficienti del polinomio caratteristico a monte del Diagramma di Bode in entrata, dipende fortemente dal metodo della pendenza finale del diagramma di

Bode. Considerando che il trasduttore opera di default una tolleranza di 9 decibel entro la quale accetta che il rapporto incrementale decrescente subisca delle variazioni non negative (come se contribuissero degli zeri), significa che sono accettabili fenomeni di non linearità. Se si considerasse lo stesso sistema del motore in corrente continua con una approssimazione dell'ordine più restrittiva in termini di valutazione delle pendenze, allora potrebbero cambiare le sorti del sistema e dunque del numero di poli/coefficienti di termini nella variabile Laplace, da calcolare.

Con una tolleranza di 9 decibel, abbiamo un terzo ordine:

```
Matrice Vandermonde Reale
a(1,1)=1      a(1,2)=0      a(1,3)=-0.01
a(2,1)=1      a(2,2)=0      a(2,3)=-1
a(3,1)=1      a(3,2)=0      a(3,3)=-4
a(4,1)=1      a(4,2)=0      a(4,3)=-25
a(5,1)=1      a(5,2)=0      a(5,3)=-100
a(6,1)=1      a(6,2)=0      a(6,3)=-400
a(7,1)=1      a(7,2)=0      a(7,3)=-2500
a(8,1)=1      a(8,2)=0      a(8,3)=-10000
a(9,1)=1      a(9,2)=0      a(9,3)=-40000

Matrice Vandermonde Immaginaria
a(1,1)=0      a(1,2)=0.1      a(1,3)=0      a(1,4)
)=-0.001
a(2,1)=0      a(2,2)=1      a(2,3)=0      a(2,4)
)=-1
a(3,1)=0      a(3,2)=2      a(3,3)=0      a(3,4)
)=-8
a(4,1)=0      a(4,2)=5      a(4,3)=0      a(4,4)
)=-125
a(5,1)=0      a(5,2)=10     a(5,3)=0      a(5,4)
)=-1000
a(6,1)=0      a(6,2)=20     a(6,3)=0      a(6,4)
)=-8000
a(7,1)=0      a(7,2)=50     a(7,3)=0      a(7,4)
)=-125000
a(8,1)=0      a(8,2)=100    a(8,3)=0      a(8,4)
```

Rispetto a come già illustrato, si è ottenuto un sistema più grande dovuto al fatto che la “larghezza” della matrice dei coefficienti, con potenze dell'unità immaginaria, è aumentata a causa del rilevamento di un sistema del terzo ordine. In realtà il sistema vero e proprio ha un comportamento non oltre il secondo. Questa sistema è accattivante per il motore, ma è fortemente corretta (con la stessa tolleranza in termini di decibel) per un altro sistema elettrico, realmente del terzo ordine.

```
Matrice Vandermonde Reale
a(1,1)=1      a(1,2)=0      a(1,3)=-158.005
a(2,1)=1      a(2,2)=0      a(2,3)=-3947.61
a(3,1)=1      a(3,2)=0      a(3,3)=-24674.1
a(4,1)=1      a(4,2)=0      a(4,3)=-98696.5
a(5,1)=1      a(5,2)=0      a(5,3)=-394786
a(6,1)=1      a(6,2)=0      a(6,3)=-9.86965e+006
a(7,1)=1      a(7,2)=0      a(7,3)=-2500
a(8,1)=1      a(8,2)=0      a(8,3)=-10000
a(9,1)=1      a(9,2)=0      a(9,3)=-40000

Matrice Vandermonde Immaginaria
a(1,1)=0      a(1,2)=12.57   a(1,3)=0      a(1,4)
)=-1986.12
a(2,1)=0      a(2,2)=62.83  a(2,3)=0      a(2,4)
)=-248028
a(3,1)=0      a(3,2)=157.08 a(3,3)=0      a(3,4)
)=-3.87581e+006
a(4,1)=0      a(4,2)=314.16 a(4,3)=0      a(4,4)
)=-3.10065e+007
a(5,1)=0      a(5,2)=628.32 a(5,3)=0      a(5,4)
)=-2.48052e+008
a(6,1)=0      a(6,2)=3141.6 a(6,3)=0      a(6,4)
)=-3.10065e+010
a(7,1)=0      a(7,2)=50     a(7,3)=0      a(7,4)
)=-125000
a(8,1)=0      a(8,2)=100    a(8,3)=0      a(8,4)
)=-1e+006
a(9,1)=0      a(9,2)=200    a(9,3)=0      a(9,4)
)=-8e+006
```

Metodi matematici per l'Ingegneria elettrica ed informatica

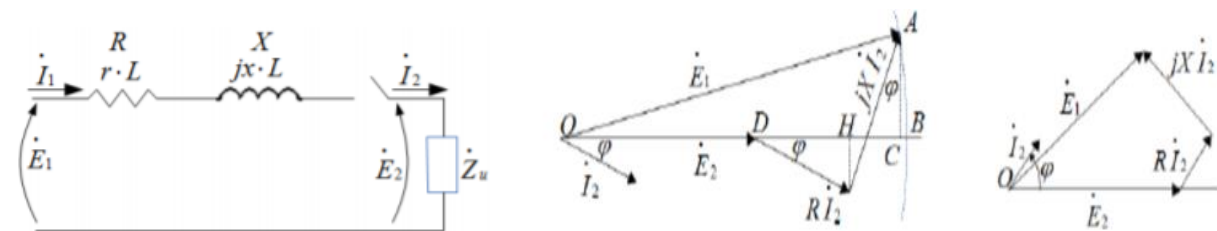
5.1 Introduzione

Durante il corso di Algoritmi numerici sono stati esposti diversi metodi come Metodo di Bisezione, Identificazione ai minimi quadrati, Moltiplicatori di Lagrange e Metodo iterativo di punto fisso. Tali metodi sono stati applicati su carta per problemi ingegneristici:

- Identificazione dei coefficienti di Fourier tramite minimi quadrati.
- Minimizzazione della sezione di un conduttore in un impianto elettrico a topologia di rete distribuita.
- Metodo delle approssimazioni successive per la costruzione di una soluzione per il problema ai valori iniziali.
- Metodo alle differenze finite di Eulero-Cauchy (implementazione in c++).

5.2 Moltiplicatori di Lagrange per la sezione di un conduttore di un impianto elettrico

Il dimensionamento delle linee elettriche si articola su tre principali analisi: l'analisi meccanica, l'analisi termica e l'analisi elettrica. Il dimensionamento elettrico si basa principalmente sul calcolo della caduta di tensione, infatti se si vuole che i carichi di una linea siano alimentati correttamente, questi devono essere alimentati con una tensione che non risenta troppo della caduta di tensione indotta dal modello della linea di trasmissione (circuito RL). In generale si può accettare una variazione del più o meno 10 %, ma quando si opera su un progetto le cadute di tensione devono rimanere al 3-4 % per la bassa tensione, e circa al 5% per la media tensione. Il modello a cui si fa riferimento è il modello classico delle linee dove per semplicità vengono trascurate le capacità perché pesano poco.



Da tale modello si ricava l'espressione della caduta di tensione industriale tramite equazioni derivanti da un diagramma fasoriale associato al circuito e alcuni accorgimenti trigonometrici, qualche approssimazione ingegneristica sui moduli dei fasori.

$$|\Delta \bar{V}_{RL}(i\omega)| = |\bar{V}_R(i\omega) + \bar{V}_L(i\omega)| = |E_1| - |E_2| = \frac{\sqrt{3}RIE_2 \cos(\phi) + \sqrt{3}XI E_2 \sin(\phi)}{V_n}$$

Approssimando la $V_2 = \sqrt{3}E_2$ (valori efficaci di tensione concatenata e stellata) alla caduta di tensione nominale, si ha:

$$\frac{RP + XQ}{V_n}$$

dove i parametri di potenza attiva e passiva sono proprio P e Q. Un'espressione elegante per l'Ingegneria Elettrica.

Adattando l'espressione a dei carichi con un alto $\cos(\phi)$ e in un contesto di rete con alimentazione a sbalzo, trifase, con caduta di tensione accettabile fino al 5% (contesto media tensione, MT), è facile ricavare il

parametro “delta V”, dell’espressione della caduta di tensione industriale, nella forma in cui si enfatizza la dipendenza dalla sezione del conduttore:

$$\Delta V(s_1) = \rho \frac{L_1 I_1}{s_1}$$

Sotto l’ipotesi di resistività comune a tutte le sezioni (caso di rete con sezione non-costante, eliminate costanti moltiplicative), è possibile esporre la buona positura del problema.



Si espone una trattazione generale e, per motivi legati all’allungamento dei passaggi, si restringe al caso di due sezioni diverse.

Si definisce una funzione costo $C(S_1, S_2, \dots, S_n)$ si hanno chiaramente dei limiti e dei vincoli da imporre, la sezione deve essere un numero positivo $S_i > 0$, la caduta di tensione non deve essere superiore alla massima caduta accettabile $\Delta V \leq \Delta V_{MAX}$, ma siccome si vuole sfruttare al meglio il materiale si impone $\Delta V = \Delta V_{MAX}$. Questo problema può essere risolto con i moltiplicatori di Lagrange, il che significa andare a costruirsi una funzione lagrangiana che è data dalla funzione che si vuole minimizzare più lambda volte il vincolo di uguaglianza, quindi il fatto che $\Delta V = \Delta V_{MAX}$ significa che l’equazione assume la forma $\Delta V - \Delta V_{MAX} = 0$.

La funzione costo totale:

$$C_{TOT} = f(S_1, S_2, \dots, S_n) = \sum_{k=1}^n c_k S_k$$

Le costanti c_k sono attribuite sulla base del prezzo di commercio. Un esempio:

Resistenza e reattanza specifica dei cavi unificati (tabella UNEL 35023-70)				
	Cavi unipolari		Cavi multipolari	
				
Sezioni nominali in mm²	Resistenza al metro R (mΩ)	Reattanza al metro XL (mΩ)	Resistenza al metro R (mΩ)	Reattanza al metro XL (mΩ)
1	22,1	0,176	22,5	0,125
1,5	14,8	0,168	15,1	0,118
2,5	8,91	0,155	9,08	0,109
4	5,57	0,143	5,68	0,101
6	3,71	0,135	3,78	0,0955
10	2,24	0,119	2,27	0,0861
16	1,41	0,112	1,43	0,0817
25	0,889	0,106	0,907	0,0813
35	0,641	0,101	0,654	0,0783
50	0,473	0,101	0,483	0,0779
70	0,328	0,0965	0,334	0,0751

Questa tabella mette in risalto come sia necessaria l’accuratezza in un problema di misura e come invece sia importante la sicurezza in un problema di collaudo di un impianto elettrico.

Dunque questa è un’applicazione dell’Analisi Matematica all’Ingegneria!

La Lagrangiana per n=2 (per sola illustrazione) :

$$L(s_1, s_2, \lambda) = c_1 s_1 + c_2 s_2 + \lambda \left[\rho \frac{l_1}{s_1} (I_1 + I_2) + \frac{\rho l_2 I_2}{s_2} - \frac{5}{100} \right]$$

La ricerca del minimo:

$$\begin{aligned} \nabla L &= 0 \\ \text{ossia:} \\ \frac{\partial L}{\partial s_1} &= 0; \frac{\partial L}{\partial s_2} = 0; \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0; \end{aligned}$$

Con semplici regole di derivazione, si arriva alla conclusione seguente:

$$s_2 = \frac{\sqrt{\frac{l_1}{l_2} \left[1 + \frac{l_1}{l_2} \right]} 20}{\rho \left\{ l_1(l_1 + l_2) + \sqrt{\frac{l_1}{l_2} \left[1 + \frac{l_1}{l_2} \right]} \right\}};$$

$$\lambda = \frac{s_2^2}{l_2} \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Può essere utile illustrare il significato di minimizzazione, dal punto di vista dei moltiplicatori di Lagrange, con la norma di un vettore. Si formalizza il problema dal punto di vista geometrico: *sia $y = mx + q$ una retta passante per i punti $P = (a, 0)$ e $T = (0, a)$.*

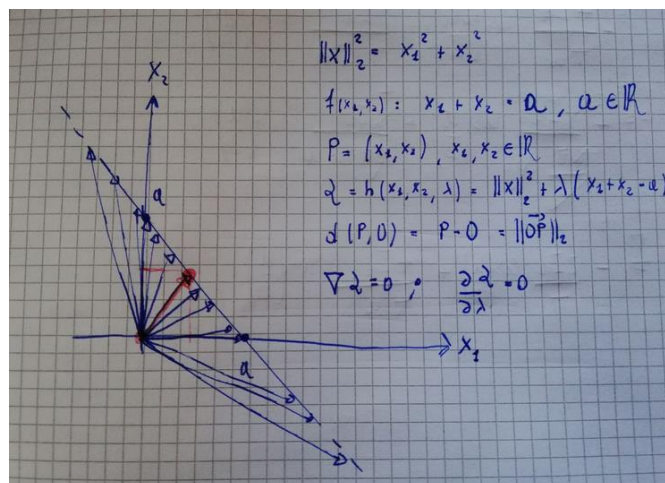
Si vuole trovare il vettore che minimizza la distanza di tale retta da $(0,0)$.

Un problema di geometria analitica e differenziale richiede sempre una buona positura.

$$\begin{cases} d(p, 0) = \|x\|_2 \\ x + y = a \\ L(x, y, \lambda) = \|x\|_2^2 + \lambda(x + y - a) \end{cases}$$

Ottenendo $\vec{v} = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

Dal punto di vista grafico, uno sketch proveniente dalla mano dell'autore di questo articolo scientifico :



5.3 Determinazione dei coefficienti di Fourier tramite minimi quadrati

Un polinomio trigonometrico di ordine n è una funzione del tipo

$$P_k(x) = a_0 + \sum_{n=1}^k \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

dove a_k e b_k sono numeri reali o complessi assegnati; si tratta di una funzione di classe $C(\infty)$ e periodica di periodo 2π . Data una successione di polinomi trigonometrici $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con P_n di ordine n , la serie trigonometrica associata è (se esiste) il limite puntuale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right);$$

Poniamoci ora il problema di approssimare una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se f coincide con la sua approssimazione tramite serie di potenze, ovvero coincide con il suo polinomio di Taylor, allora f è analitica e quindi di classe $C(\infty)$. Se però f non è di classe $C(\infty)$, allora sicuramente non coincide con il suo polinomio di Taylor. Vediamo quando coincide con una sua approssimazione tramite serie trigonometriche. Di sicuro, se lo è, deve essere periodica con periodo (almeno) 2π , cioè $f(x + 2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Assumiamo pertanto che f sia periodica con periodo 2π . Allora è sufficiente considerare f nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Osserviamo f è continua se e solo se $f(0) = f(2\pi)$.

Se f coincide con una sua approssimazione tramite serie trigonometriche, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$$

Ovvero, dal punto di vista metrico, al limite (nello spazio delle funzioni continue con metrica Lagrangiana)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(P_n(x), f(x)) = 0$$

Se consideriamo funzioni f tali che f è integrabile in $[0, 2\pi]$, allora possiamo scegliere la distanza indotta dalla norma e che coincide con l'energia di un segnale :

$$\|f(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^T |f(t)|^2 dt} = \sqrt{\int_0^T f(t) \overline{f(t)} dt}$$

e sfruttarla per comporre uno scarto quadratico medio, senza dilungarci in spazi di Hilbert e quant'altro, che verrà definito così:

$$\phi(a, b) = \langle f(t) - T_n(t), 1 \rangle = \|f(t) - P(t)\|^2 = \int_0^T [f(t) - P(t)]^2 dt$$

$$\text{con } P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^1 \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t);$$

Per motivi di complessità si considera solo la componente armonica fondamentale.

Sviluppando i calcoli:

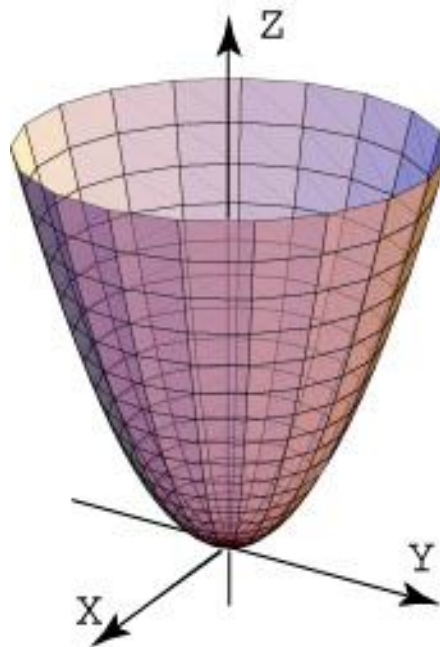
$$\phi(a, b) = \|f(t)\|^2 T + \|P(t)\|^2 T - 2 \int_0^T [f(t) - P(t)]^2 dt;$$

$$\phi(a, b) = \|f\|^2 + T(a_0 - \hat{a}_0)^2 - T\hat{a}_0^2 + T(a_1 - \hat{a}_1)^2 - T\hat{a}_1^2 + T(b_1 - \hat{b}_1)^2 - T\hat{b}_1^2;$$

Procedendo con la minimizzazione:

$\min_{a, b \in \mathbb{R}} \|f(t) - P(t)\|^2 = \nabla \phi(a_0, a_1, b_1) = 0$ è immediato vedere quale sia il risultato finale. Ovviamente tutto ciò è stato lecito solo usando le forme dei coefficienti di Fourier e dunque viene rispettato il Teorema di convergenza in media quadratica della serie di Fourier.

Ancora una volta la minimizzazione ci porta ad una filosofia geometrica di questo tipo:



dal punto di vista della minimizzazione.

5.4 Metodo delle approssimazioni successive

Durante il corso di [Algoritmi Numerici ed Applicazioni](#) è stato enunciato il Teorema di Banach ed è stato applicato al Teorema di Cauchy per costruire delle soluzioni. Cercare una soluzione del problema ai valori iniziali o problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con $x \in R$, $y \in R^n$, equivale a cercare una soluzione dell'equazione integrale:

$$y(t) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Il metodo consiste nel costruire $y_n(t)$ per $n=0,1,2,3, \dots$, in questo modo:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt$$

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_2(t)) dt$$

.....

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

La soluzione del problema di Cauchy è costruita mediante approssimazioni successive.

Dal punto di vista geometrico abbiamo una distanza tra le ascisse che è maggiore della distanza tra le immagini.

Sono funzioni con punti fissi:

- Una rotazione del piano intorno ad un punto assegnato: in questo caso è l'unico punto fisso della rotazione.
- Una riflessione del piano rispetto ad una retta: ogni punto della retta è un punto fisso.

- Si può dimostrare che la funzione $y(t)$ parametrizzata come sopra è una contrazione con costante di Lipschitz minore di 1.

Dimostrazione

Si consideri il seguente problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con $x, \in R$, $y \in R^n$. Sia $f: X \rightarrow X$ una applicazione lineare e sia (X, d) uno spazio metrico tali che valga $f(y) = y$.

Si assumano:

- 1) $X = C_{(x_0-\delta, x_0+\delta)}^0, \delta > 0$, completo rispetto alla norma Lagrangiana (spazio di successioni di Cauchy) tale che si abbia:

$$\|f\|_{C^0} = \{sup|f(x)| t. c. x \in X\};$$

- 2) La contrazione f agisce sulla y che appartiene a tale insieme sopra definito e produce la nuova funzione:

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

In cui la y è proprio il punto fisso di f .

Sotto tali ipotesi possiamo supporre di dichiarare due funzioni z e supporre che il punto fisso y sia unico per una funzione differenza delle due stesse (una nuova z) e dunque dimostrare che questa sia una contrazione e che la stessa costante (che è proprio quella di Lipschitz) deve essere inferiore ad 1.

Viene mostrato un pezzo dei passaggi:

$$|z_1 - z_2| = \int_{x_0}^x [f_1 - f_2] dt$$

A tale espressione è possibile applicare la disuguaglianza triangolare degli integrali e la disuguaglianza di Lipschitz, ottenendo la norma nello spazio metrico X dei due vettori y_1 e y_2 .

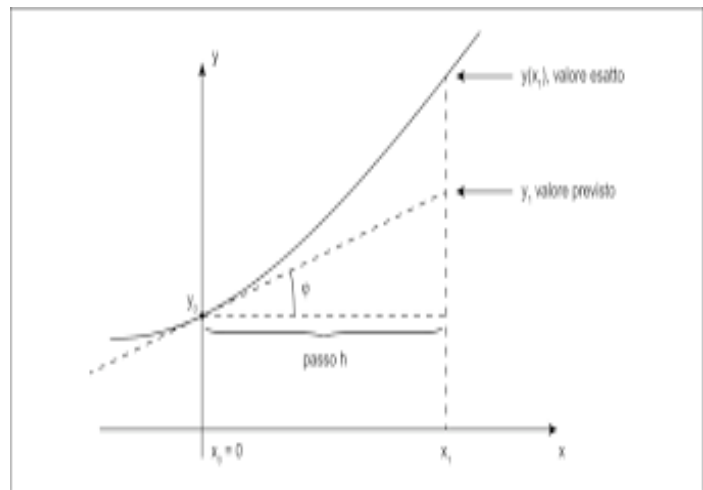
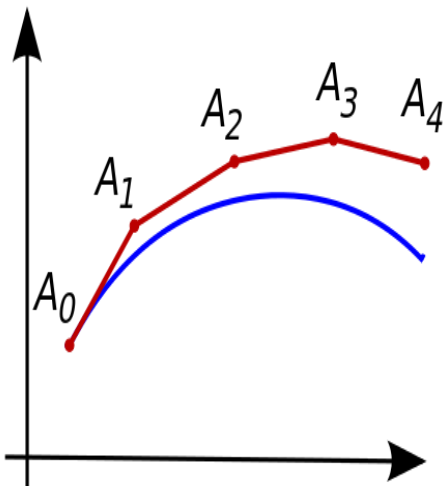
Si arriva a :

$$|z_1 - z_2| \leq L \max|y_1 - y_2|(t - x_0)|_{x_0}^x ;$$

Posto $\delta = x - x_0$ è immediato ricavare che affinché valga la disuguaglianza di Lipschitz con il Teorema delle contrazioni di Banach, allora non può che valere $L < \delta^{-1}$ con $\delta > 0$ e dunque si conclude che $L < 1$. Ricerca la soluzione di un problema di Cauchy in Analisi Matematica equivale alla ricerca del punto fisso di una contrazione. Il teorema ai valori iniziali ha infatti due dimostrazioni possibili, per quanto concerne la soluzione esistente ed unica in un intorno di un punto.

5.5 Metodo alle differenze finite di Eulero-Cauchy

Si consideri il problema del calcolo della forma di una curva sconosciuta che inizia in un certo punto e soddisfa una data equazione differenziale. In questo caso, un'equazione differenziale ordinaria può essere immaginata come una formula tramite cui il coefficiente angolare della retta tangente alla curva può essere calcolato in ogni punto della curva. Si prenda quindi un piccolo incremento sulla retta tangente, da x_0 fino ad un punto x_1 sufficientemente vicino. Si può supporre che in questo intervallo il coefficiente angolare non cambi significativamente, quindi se si assume che è ancora sulla curva si può utilizzare nuovamente lo stesso ragionamento fatto per il punto in modo che, dopo diversi passi, viene generata una curva poligonale come mostrato sotto. Si tratta di una curva che non diverge troppo dalla curva originale sconosciuta; l'errore tra le due curve può essere diminuito se l'incremento è piccolo abbastanza e l'intervallo di calcolo è finito.



Viene presentato, in chiusura, uno sketch del codice.

```
double derivateEval(double xi,double ni,int* p)
{
    double z=0.0;
    for(int i = 0; i < X;i++)
        z = z+pow(xi,i)*p[i];
    z = z+p[X-1]*ni;
    return z;
}

void Eulero_Step(double* n, int x0,int* p,double h)
{
    for(int i=1; i<N;i++)
        n[i] = n[i-1]+h*valutader(h*(i-1),n[i-1],p);
}

```

Sostanzialmente implementa la seguente equazione iterativa monostep:

$$\begin{cases} \eta_{j+1} = hf(x_j, \eta_j) + \eta_j \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

6

Verifica della bontà degli algoritmi

In questa sezione si affronterà l'efficienza di alcuni algoritmi che sono stati citati nel corso dell'illustrazione.

6.1 Fattorizzazioni di Householder e Cholesky

Di seguito alcuni esempi numerici di tali fattorizzazioni.

Per Householder è interessante osservare le matrici R e Q che vengono fuori da una matrice rettangolare che viene fattorizzata.

Viene data in input una matrice A e vengono calcolate le matrici Q ed R. Come già detto, R dovrà assumere la stessa dimensione di A e verrà effettuato un "padding" di spazio tramite zeri di tutte le posizioni rimanenti.

```
A
12.633 -51.364 4.000
6.000 167.000 -68.000
-4.000 24.000 -41.239
-1.000 1.000 0.000
2.000 0.000 3.000

Q
0.858 -0.378 0.330 0.079 0.075
0.408 0.911 -0.033 0.025 0.044
-0.272 0.164 0.937 -0.047 -0.135
-0.068 0.012 -0.000 0.979 -0.192
0.136 -0.013 -0.107 -0.180 -0.968

R
14.717 17.405 -12.674
-0.000 175.503 -70.259
0.000 0.000 -35.394
0.000 0.000 -0.000
0.000 0.000 -0.000

A == Q * R ? yes
12.633 -51.364 4.000
6.000 167.000 -68.000
-4.000 24.000 -41.239
-1.000 1.000 -0.000
2.000 -0.000 3.000
```

Si noti che il programma calcola anche i residui tramite le norme della differenza $\|A-QR\|$. Si effettua l'output soltanto se considerata come "yes" la stringa che segnala che l'errore si è mantenuto (il residuo) sotto 10^{-12} e allora può ritenersi buona la fattorizzazione.

```
The error in version L2 of  $\|A-QR\|$  is:0.000000000000000000000000000027719406907443
The error in version infinity of  $\|A-QR\|$  is:0.000000000000000000000032196467714129540000000000
The error in version one of  $\|A-QR\|$  is:0.0000000000000000185629289717326170000000000
```

Per quanto concerne la fattorizzazione di Cholesky, si illustra un esempio. Data una matrice quadrata, si calcolano la L e la sua trasposta e si calcola il residuo $\|A-A'\|$ con A' il prodotto delle due matrici calcolate.

```

MATRICE DI PARTENZA
-----
  4    12   -16
 12    37   -43
-16   -43    98

SCOMPOSIZIONE CHOLESKY
-----
Lower Triangular                Transpose
  2    0    0                2    6   -8
  6    1    0                0    1    5
 -8    5    3                0    0    3

MATRICE L
-----
  2    0    0
  6    1    0
 -8    5    3

MATRICE Lt
-----
  2    6   -8
  0    1    5
  0    0    3

MATRICE LxLt
-----
La matrice inserita e':
  4    12   -16
 12    37   -43
-16   -43    98

CALCOLO DELL'ERRORE
-----
NORMA UNO MATRICE ||A-L*L_t||
0.000000

NORMA INFINITO ||A-L*L_t||
0.000000

```

6.2 Metodo di Eulero esplicito

Si consideri il seguente problema ai valori iniziali di un sistema a polo a parte reale positiva (dunque un sistema che ha risposta che diverge per t lontano dall'origine):

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + t + y(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Si fa un'analisi dell'equazione differenziale.

Un'equazione differenziale è un problema che consiste nel trovare tutte le funzioni $y(x)$ tali che, sostituendo la stessa $y(x)$ e le sue derivate $\frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}}(y(t))$

Al posto delle variabili di una funzione data risulta soddisfatta l'uguaglianza seguente (forma implicita), per ogni x in un dato intervallo. Si chiama "ordine" dell'equazione quel valore numerico con cui, classicamente, si intende che le soluzioni $y(x)$ devono (dovranno) essere funzioni derivabili n volte. Dal punto di vista della Teoria dei Sistemi, l'ordine n dell'equazione è il grado del coefficiente in s del termine che rende in forma monica (se questo è unitario) il polinomio caratteristico rappresentato con la variabile di Laplace.

In questo caso si ha un'equazione del primo ordine, lineare, non omogenea, rappresentabile in forma normale (lo è già), a coefficienti costanti e che rappresenta un sistema del primo ordine sollecitato da una rampa lineare e con polinomio caratteristico del primo ordine con una sola radice, lambda è a parte reale positiva e parte immaginaria nulla. Il sistema ha una risposta libera che diverge e dunque qualunque ingresso canonico si utilizzi, il sistema sarà sempre instabile. Si potrebbe citare l'uso di un controllore a retroazione non unitaria per parlare di stabilità

In quanto la risoluzione del problema si ha la soluzione rappresentabile più precisamente come:

$$y(t) = (2e^t - 2 + t) * \text{gradino}$$

Di seguito una tabella dei valori di approssimazione e dei valori reali calcolati da Desmos.

Asse dei tempi	Y(t) reale	Y(t) approssimata
0	0	0
0.05	0.053	0.05
0.10	0.11	0.105
0.15	0.174	0.165251
0.2	0.243	0.231017
0.25	0.318	0.302584
0.3	0.4	0.380262
0.35	0.488	0.464396
0.4	0.584	0.555379
0.45	0.687	0.653660

E' notevole provare a vedere cosa succede se si applica questo metodo ad un caso come:

$$\begin{cases} \frac{y''(t)}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{1}{y^2} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Questo Problema di Cauchy ha solo un aspetto spaventoso e qui diversi algoritmi tendono a divergere. La soluzione analitica è rintracciabile a mano e ciò dimostra che nemmeno risolvere equazioni a mano sia inutile!!!

6.3 Metodo delle approssimazioni successive

Il problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} y' = z = f_1 \\ z' = -y = f_2 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

Il campo vettoriale $F = (f_1, f_2)$.

Un' interpretazione geometrica potrebbe essere: $F(x,y,z) = z\hat{y} + (-y)\hat{k}$ in cui l'asse x interpreta l'asse z nel nostro normale modo di vedere uno spazio in tre dimensioni (y versore interpreta x versore e così via).

Si procede con il metodo iterativo costruendo:

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_0 + \int_0^x f_1(y_k, z_k) dt = y_0 + \int_0^x (z_k(t)) dt \\ z_{k+1} = z_0 + \int_0^x f_2(y_k, z_k) dt = z_0 - \int_0^x (y_k(t)) dt \end{cases}$$

passo 0: condizioni iniziali

$$\begin{cases} y_1 = 0 + \int_0^x dt \\ z_1 = 1 - \int_0^x dt \end{cases}$$

passo 1

$$\begin{cases} y_2 = x \\ z_2 = 1 - \int_0^x t dt = 1 - \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

passo k

$$\begin{cases} y_k = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ z_k = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \sin(x) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} z_n &= \cos(x) \end{aligned}$$

Cambiano il segno della seconda componente del campo vettoriale, questo problema con conclusione trigonometrica evolve in iperbolica con $\cosh(x)$ e $\sinh(x)$ come soluzioni del problema ai valori iniziali.

Ovviamente le due serie non si sono analizzate con il Criterio di Leibniz e non si è calcolato il raggio di convergenza perché sono funzioni Principi della Trigonometria ed era già intuibile il risultato.

Se denotiamo l'errore al passo k con $\varepsilon_k = x_k - x$ ossia $\varepsilon_k = f(x_k) - f(x)$, il metodo converge se e solamente se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sin(x) \right| = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \cos(x) \right| = 0.$$

In questi casi banali non si vede quale possa essere l'efficacia del metodo poiché l'errore risulta nullo.

Un problema di Cauchy dove si può veder bene l'illustrazione grafica del problema di approssimazione potrebbe essere:

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La funzione $f(x,y)=xy$ è definita su tutto \mathbb{R}^2 ed è C^∞ .

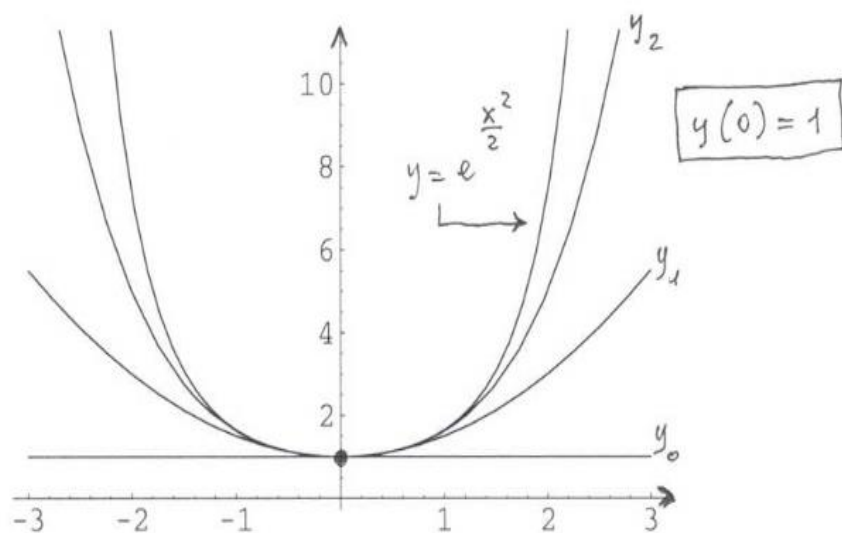
Applichiamo il metodo delle approssimazioni successive:

$$\begin{aligned} & y_0 = 1 \\ & \dots\dots\dots \\ & y_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \frac{x^4}{4} + \frac{1}{24} \frac{x^6}{6} \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Notiamo che questi termini sono i primi termini dello sviluppo di Taylor della funzione Gaussiana (tolte costanti moltiplicative) per cui iterando il procedimento possiamo dedurre che la soluzione è :

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$$

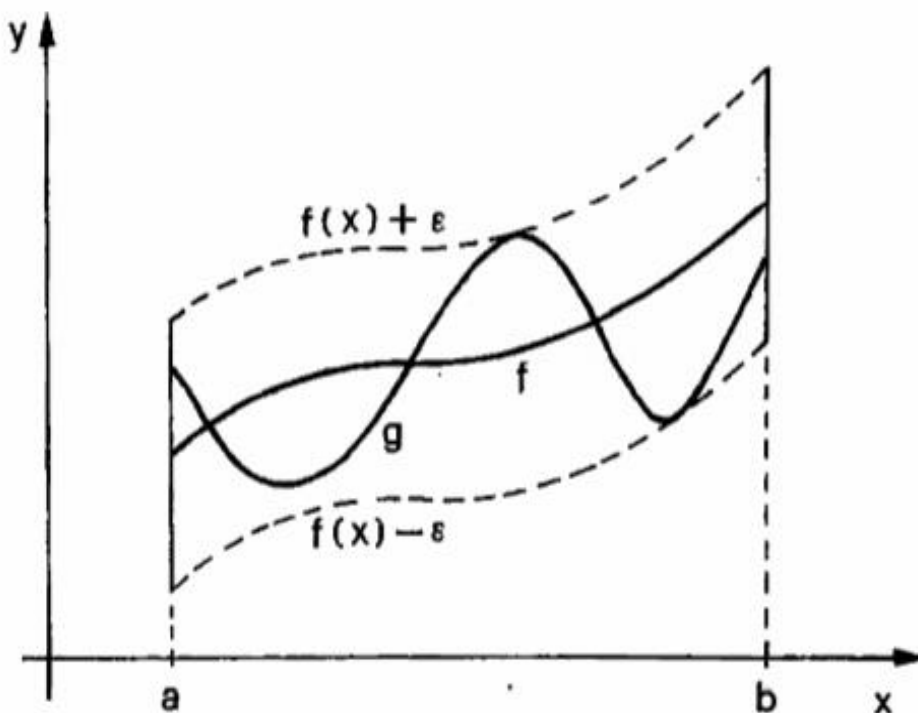
Si può vedere il significato grafico e come il metodo agisce, via via, avvicinandosi per commutare alla curva:



Il metodo delle approssimazioni successive è costruttivo. Nell'esempio la forma di $y_n(x)$ è particolarmente semplice, per cui è facile capire a quale funzione, applicando il metodo, $y_n(x)$ converge. Lo stesso grafico suggerisce la possibilità, in generale a problemi più complessi e di soluzioni note (si può applicare anche la Trasformata di Fourier per vedere cosa si ottiene), di poter usare la distanza Lagrangiana per valutare la bontà dell'algoritmo.

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in [a, b]\} = \|f - g\|_c.$$

Dal punto di vista grafico:



Il "tubo epsilon" contiene la funzione

7

Complessità computazionale

7.1 Cosa è la complessità computazionale

Per misurare l'efficienza di un algoritmo in maniera univoca, bisogna definire una metrica indipendente dalle tecnologie utilizzate, altrimenti uno stesso algoritmo potrebbe avere efficienza diversa a seconda della tecnologia sulla quale è eseguito.

Si faccia riferimento ad un qualsiasi calcolatore M generico.

Risorsa tempo: si dice che la macchina M opera in tempo $f(n)$ se dato un input di lunghezza n , produce il risultato in $f(n)$ passi. Si misura il tempo in passi, indipendentemente dal tempo necessario per eseguire ciascun passo. L'ipotesi è che ciascun passo 'elementare' abbia lo stesso costo computazionale (costante).

Risorsa spazio: si dice che la macchina M opera in spazio $f(n)$ se dato un input di lunghezza n , utilizza $f(n)$ celle temporanee (oltre ad input ed output) per la computazione.

Poiché calcolare $f(n)$ è complicato, ci si riferisce in genere al limite asintotico superiore e questo è un accordo che vale per tutta l'Ingegneria del Software. Dal punto di vista formale:

$$f(n) = O(g(n)) \text{ se}$$

$$\exists(n_0, c) \text{ tali che } \forall n > n_0$$

$$f(n) \leq cg(n)$$

La funzione $f(n)$ da un certo n in poi cresce al più come la funzione $g(n)$. Diremo che l'algoritmo ha complessità $O(g(n))$, ossia con costo computazionale dell'ordine di g .

7.2 Complessità computazionale nelle fattorizzazioni

Per quanto riguarda il costo computazionale del k -esimo passo del metodo di Householder si hanno di $2(n-k+1)$ operazioni, a meno di costanti additive, per il calcolo di $a^1(k)$ e per il calcolo di $\beta(k)$. Inoltre l'aggiornamento di $a_{i,j}^{(k+1)}$ richiede $4(n-k+1)^2$ operazioni aritmetiche a meno di termini di ordine inferiore. Sommando su k si arriva a un costo dominato da $\frac{4}{3}n^3$ operazioni. Questo costo non comprende il calcolo degli elementi del fattore $Q=M_1M_2\cdots M_{n-1}$, ma prevede di memorizzare la matrice Q in modo implicito attraverso le matrici M_k , $k=1,\dots,n-1$.

Confrontando col metodo di eliminazione gaussiana per il calcolo della fattorizzazione LU abbiamo quindi un costo doppio.

Per quanto concerne la fattorizzazione di Cholesky si ha una matrice come "cavia" che è simmetrica definita positiva: esiste ed è unica la fattorizzazione $A = LL^t$, L è una matrice triangolare inferiore con elementi diagonali non nulli.

Il suo costo computazionale è $O(\frac{n^3}{6})$.

Conclusione

Il seminario ha permesso di sviluppare un metodo critico di comportamento nell'interfacciamento di problemi ricorrenti negli ambiti ingegneristici.

Bibliografia

G. Rodriguez.

Algoritmi Numerici. Pitagora Editrice, Bologna, 2008.