



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

Facoltà di Ingegneria e Architettura

Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica

Title

Candidato:

Nome

Matr. 70/75/...

Relatrice:

Prof.ssa Luisa Fermo

Anno Accademico

Indice

| | |
|-----------------------------------------------------------|-----------|
| Introduzione | 2 |
| 1 Titolo primo capitolo | 3 |
| 1.1 Come si compila un file \LaTeX | 3 |
| 1.2 Esempio di un paragrafo | 3 |
| 1.2.1 Esempio di sottoparagrafo | 4 |
| 1.3 Esempio di un altro paragrafo | 4 |
| 2 Un altro capitolo | 5 |
| 2.1 Risoluzione numerica di equazioni integrali | 5 |
| 2.2 Il caso discreto | 6 |
| Conclusioni | 9 |
| Bibliografia | 10 |

Introduzione

Scrivere qui l'introduzione alla tesi

Capitolo 1

Titolo primo capitolo

1.1 Come si compila un file L^AT_EX.

Prima cosa: installare T_EX: vedi <https://www.tug.org/texlive/>.

Il più diffuso front-end a finestre è T_EXmaker: <https://www.xm1math.net/texmaker/>.

Per compilare un file L^AT_EX e creare il PDF, di norma, bisogna processarlo 2–3 volte col programma `pdflatex`.

Se il file contiene una bibliografia, bisogna lanciare una volta `pdflatex`, una volta `bibtex` e 2–3 volte `pdflatex`.

1.2 Esempio di un paragrafo

Un'equazione (non numerata) si scrive così

$$\frac{\partial A}{\partial z} + c = f(z), \quad z \in \Omega.$$

Se è necessario numerarla elimina l'asterisco vicino alla parola equation:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -\frac{\beta is}{n}, \\ \frac{di}{dt} = \frac{\beta is}{n} - \gamma i, \\ \frac{dr}{dt} = \gamma i, \end{cases} \quad (1.1)$$

così puoi fare riferimento al sistema (1.1). Vedi anche la differente formattazione della formula (1.2)

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = -\frac{\beta is}{n}, \\ \frac{di}{dt} = \frac{\beta is}{n} - \gamma i, \\ \frac{dr}{dt} = \gamma i, \end{cases} \quad (1.2)$$

Per creare un nuovo paragrafo, lascia una riga bianca. Se devi usare una variabile x o una formula $y = 2x - 3$ nel testo, mettila tra dollari (\$x\$) in modo che venga selezionato il font corretto.

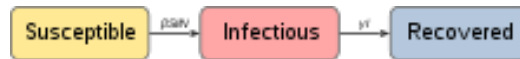


Figura 1.1: Esempio di Figura

Puoi inserire una figura e fare riferimento alla Figura 1.1 nel testo. La figura verrà visualizzata automaticamente nella posizione migliore.

1.2.1 Esempio di sottoparagrafo

Testo del sottoparagrafo.

1.3 Esempio di un altro paragrafo

Testo del paragrafo.

Capitolo 2

Un altro capitolo

Si può scrivere anche una introduzione al capitolo

Un riferimento bibliografico si cita con il comando [6]. Tale fonte bibliografica dovrà essere presente nell'ultima parte del file o inserita in un file BibTeX; vedi il file `biblio.bib`.

Per citare più riferimenti alla volta si fa così [1, 2, 3, 4, 5, 7].

Vedi la Sezione 1.1 per informazioni sulla compilazione.

2.1 Risoluzione numerica di equazioni integrali

Un'equazione integrale è un'equazione in cui la soluzione f è una funzione che compare sotto il segno di integrale. Si parla di equazione integrale lineare di prima specie se essa si presenta solo sotto il segno di integrale

$$\int_D k(x, y) f(x) dx = g(y), \quad y \in D.$$

Si fa riferimento, invece, a una equazione integrale lineare di seconda specie se la soluzione è presente anche fuori l'integrale

$$f(y) + \int_D k(x, y) f(x) dx = g(y), \quad y \in D.$$

In entrambi i casi le funzioni k e g sono dette nucleo e termine noto, rispettivamente, e D rappresenta il dominio della funzione f (un intervallo finito, illimitato, una curva, ...).

Diversi problemi applicativi, anche il semplice problema di Dirichlet o Neumann per l'equazione di Laplace, si possono riformulare in termini di

equazioni integrali. Nelle applicazioni, la soluzione f è il segnale da ricostruire, la funzione g , di solito nota solo in un set di punti, rappresenta i dati sperimentali; il nucleo k invece, di solito nota analiticamente, rappresenta la risposta all'impulso dell'apparecchiatura sperimentale.

La ricerca mira a sviluppare metodi numerici per approssimare la soluzione di equazioni integrali di prima e seconda specie. Tale sviluppo si articola nei seguenti step:

- Sulla base della regolarità delle funzioni coinvolte, si sceglie lo spazio funzionale in cui approssimare la soluzione;
- Si approssima l'operatore integrale mediante una opportuna formula di quadratura o cubatura e si valuta l'equazione risultante in determinati punti. Si ottiene così un sistema di equazioni. La scelta dello schema di quadratura dipende dalle eventuali patologie delle funzioni coinvolte.
- Si studia teoricamente il metodo in termini di stabilità e convergenza, fornendo se possibile anche delle stime teoriche dell'errore;
- Si effettua una vasta sperimentazione numerica al fine di verificare se le stime teoriche sono confermate dalle prove numeriche.

2.2 Il caso discreto

In molti problemi applicativi la funzione da approssimare è nota solo attraverso un certo numero di valori affetti da errore. Si vedano, ad esempio, i dati rappresentati nella Figura 2.1, ottenuti aggiungendo degli errori Gaussiani ai valori di una funzione seno. In casi di questo tipo non è conveniente effettuare un'interpolazione, dal momento che è nota la presenza di forti errori sui dati, e si preferisce effettuare un'approssimazione ai minimi quadrati ricorrendo ad una discretizzazione della norma-2.

Siano $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ le ascisse degli $m + 1$ punti per i quali sono noti i valori $\{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ della funzione $f(x)$ ($y_i = f(x_i)$). Fissato un numero naturale $n \leq m$, per ogni $p_n \in \Pi_n$ si consideri la norma

$$\|p_n - f\|_2 = \left(\sum_{i=0}^m [p_n(x_i) - y_i]^2 \right)^{1/2}. \quad (2.1)$$

Intendiamo determinare il polinomio $p_n^*(x)$ di grado n che risolva il problema di minimo

$$\min_{p_n \in \Pi_n} \|p_n - f\|_2^2 \quad (2.2)$$

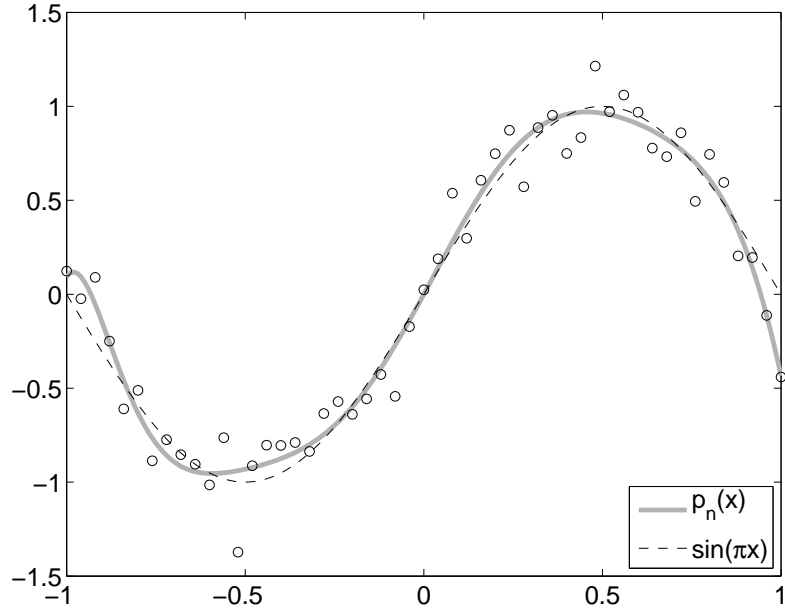


Figura 2.1: Polinomio di migliore approssimazione ($n = 10$)

(per semplicità, dal momento che i due problemi sono equivalenti, minimizzeremo il quadrato della norma).

Se $m = n$ la soluzione coincide col polinomio interpolante, se invece $m > n$ essa fornisce la migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati rispetto alla norma discreta (2.1).

Utilizzando la base canonica si ottiene

$$p_n(x_i) = \sum_{j=0}^n a_j x_i^j = (X\mathbf{a})_i, \quad i = 0, \dots, m,$$

dove $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ è il vettore dei coefficienti del polinomio e X è la matrice di Vandermonde di dimensione $(m+1) \times (n+1)$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^n \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza si ha

$$\|p_n - f\|_2^2 = \sum_{i=0}^m [(X\mathbf{a})_i - y_i]^2 = \|X\mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2^2,$$

e il problema (2.2) risulta essere equivalente alla risoluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema lineare sovradeterminato

$$X\mathbf{a} = \mathbf{y}.$$

La soluzione di tale sistema lineare può essere calcolata la fattorizzazione di Cholesky al sistema normale

$$X^T X \mathbf{a} = X^T \mathbf{y} \quad (2.3)$$

oppure utilizzando la fattorizzazione QR della matrice X , procedimento più conveniente dal punto di vista della stabilità numerica.

Esempio 2.1 *L'algoritmo appena descritto è quello implementato nella funzione polyfit di Matlab. Il grafico della Figura 2.1 è stato prodotto col codice seguente*

```
N=50;
n=10;
t=linspace(-1,1,N+1)';
b=sin(pi*t)+.2*randn(N+1,1);
x=linspace(-1,1,201)';
f=sin(pi*x);
a=polyfit(t,b,n);
p=polyval(a,x);
plot(x,p,x,f,'--',t,b,'o')
legend('p_n(x)', 'sin(\pix)',4)
```

Conclusioni

Scrivere qui le conclusioni alla tesi

Bibliografia

- [1] B. P. Bogert, M. J. R. Healy, and J. W. Tukey. The quefrency alanalysis of time series for echoes: cepstrum pseudo-autocovariance, cross-cepstrum and saphe cracking. In M. Rosenblatt, editor, *Proc. Symposium Time Series Analysis*, pages 209–243, New York, 1963. John Wiley and Sons.
- [2] P. Díaz de Alba, L. Fermo, F. Pes, and G. Rodriguez. Minimal-norm solution of an overdetermined system of first kind integral equations: algorithms and applications. *Numer. Algorithms*, 2022.
- [3] P. Díaz de Alba, L. Fermo, C. van der Mee, and G. Rodriguez. Recovering the electrical conductivity of the soil via a linear integral model. *J. Comput. Appl. Math.*, 352:132–145, 2019.
- [4] P. C. Hansen. *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems, Numerical Aspects of Linear Inversion*. SIAM, Philadelphia, PA.
- [5] P. C. Hansen. *Regularization Tools: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems*, 1998. <http://www2.imm.dtu.dk/~pch/Regutools/>.
- [6] G. Rodriguez. *Algoritmi Numerici*. Pitagora Editrice, Bologna, 2008.
- [7] G. Rodriguez and S. Seatzu. *Introduzione alla Matematica Applicata e Computazionale - Seconda Edizione*. Pitagora Editrice, Bologna, 2017.