Prova scritta di Metodi Numerici per l'Ingegneria

21 settembre 2016

1. Si stabilisca se la seguente matrice è ortogonale
$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$
Si calcoli, quindi, la sua inversa e il condizionamento di A in norma 2,1 e ∞. Si determini, inoltre, nel modo più conveniente possibile la soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{b} = [1, -1, 1]^T$.

2. Si determini, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, la soluzione del seguente sistema
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \end{cases}$$
Si calcoli, inoltre, sempre mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il determinante della matrice dei coefficienti del sistema.

3. Assegnata la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & c \\ 1 & 3 & 0 \\ c & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
si determini i valori del parametro reale c che rendono A invertibile e quelli per i quali risulta convergente il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (1, 1, 0)^T$. Posto $c = 1$, si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel, col vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.

4. Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine
$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{\alpha + 2} \left[f(x_k, \eta_k) + 4f\left(x_k + \beta h, \eta_k + \beta h f(x_k, \eta_k)\right) \right].$$