Prova scritta di Metodi Numerici per l'Ingegneria

21 luglio 2016

1. Assegnata la matrice
$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -a^2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 2 \end{bmatrix}$$
si determini i valori del parametro reale a che rendono A invertibile e quelli per i quali risulta convergente il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = (6, 8, 0)^T$. Posto $a = 1$, si calcolino le prime due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel, col vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$.

2. Dopo aver calcolato la fattorizzazione $PA = LU$ della matrice
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 12 & 18 \end{bmatrix},$$
la si utilizzi per calcolare il determinante e l'inversa di A.

3. Costruire il polinomio di secondo grado che approssima nel senso dei minimi quadrati la seguente tabella di dati

x_i	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y_i	1	0	-1	0	1

risolvendo il sistema lineare sovradeterminato risultante col metodo delle equazioni normali. Dire, inoltre, se il polinomio determinato è interpolante.

4. Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine
$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{\alpha - 2}\left[f(x_k, \eta_k) + 2f\left(x_k + \frac{\alpha}{\beta}h, \eta_k + \frac{\alpha}{\beta}hf(x_k, \eta_k)\right)\right].$$