Prova scritta di Metodi Numerici per l'Ingegneria
29 gennaio 2016

1. Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x_2 + 6x_3 + x_4 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_2 + 2x_4 = 5 \end{cases}$$

   e utilizzarla per calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

2. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \beta & \frac{1}{2} & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

   Stabilire per quali valori dei parametri α e β la matrice A è invertibile e per quali è simmetrica definita positiva. Si consideri poi il sistema $Ax = b$ con $b = [1 \ \ -2 \ 0]^T$. Si studi al variare dei parametri α e β la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema e si calcolino le prime due iterate partendo dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \ 1 \ 0]^T$.

3. Esprimere nella forma di Lagrange il polinomio che interpola la seguente tabella di dati

x_i	-1	0	1	2
y_i	-1	1	3	5

   e calcolare il suo valore nel punto di ascissa $x = \frac{3}{2}$.

4. Dire per quali valori dei parametri α, β reali positivi il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente del secondo ordine

$$\eta_{k+1} = \eta_k + h\left[\left(2 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3}\right) f(x_k, \eta_k) + \frac{\alpha}{3} f(x_k + \alpha h, \eta_k + \alpha h f(x_k, \eta_k))\right].$$