

## Prova scritta di Metodi Numerici per l'Ingegneria

16 luglio 2015

1. Dati i tre numeri

$$a = 113.44, \quad b = -60.213, \quad c = -53.243,$$

si calcolino le quantità

$$(a + b) + c \quad \text{e} \quad a + (b + c)$$

in un sistema in virgola mobile in base 10 con mantissa di 5 cifre significative e si valutino i rispettivi errori relativi rispetto al risultato esatto. Commentare i risultati.

2. Si calcoli la fattorizzazione  $PA = LU$  della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

e la si utilizzi per calcolare il determinante di  $A$  e la prima colonna della sua inversa.

3. Si consideri il sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  dove

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 1 \\ \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro  $\alpha$  la matrice  $A$  è invertibile e per quali valori i suoi autovalori sono positivi. Si studi al variare del parametro  $\alpha$  la convergenza del metodo di Jacobi applicato a tale sistema e, posto  $\alpha = 1/2$ , si calcolino le prime due iterate a partire da  $\mathbf{x}^{(0)} = [1, 2, 3]^T$ . Infine, si studi al variare del parametro  $\alpha$  la norma di  $A$  con indice 1 e  $\infty$ .

4. Dire se il seguente metodo alle differenze finite, dipendente da un parametro  $\beta \in \mathbb{R}$ , è convergente

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{5} \left[ 2f(x_i, \eta_i) + 3f(x_i + \frac{h}{\beta}, \eta_i + \frac{h}{\beta}f(x_i, \eta_i)) \right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

e per quale valore del parametro risulta del second'ordine. Sostituiti il valore di  $\beta$  che rende il metodo del second'ordine, e posto  $h = \frac{1}{2}$ , calcolare i valori di  $\eta_1$  e  $\eta_2$  per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$