

Prova scritta di Metodi Numerici per l'Ingegneria

21 febbraio 2014

1. Dati i tre numeri

$$a = 72.213, \quad b = 41.243, \quad c = -113.44,$$

si calcolino le quantità

$$(a + b) + c \quad \text{e} \quad a + (b + c)$$

e i rispettivi errori relativi rispetto al risultato esatto, in un sistema in virgola mobile in base 10 con mantissa di 5 cifre significative. Commentare i risultati.

2. Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

3. Sia a un parametro reale e si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3a & a & 0 \\ a & a & 2a \\ 0 & a & 2a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali valori del parametro a il sistema ammette un'unica soluzione e per quali il metodo di Jacobi è convergente. Si calcolino, infine, le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel nell'ipotesi in cui $a = 1$ e il vettore iniziale è $x^{(0)} = [1, 0, 1]^T$.

4. Si studi la stabilità, la consistenza e l'ordine di convergenza del seguente metodo alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{5} \left[f(x_k, \eta_k) + 4f \left(x_k + \frac{5}{8}h, \eta_k + \frac{5}{8}hf(x_k, \eta_k) \right) \right].$$

Dire se il seguente problema di Cauchy è ben posto

$$\begin{cases} y' = x + y, & x \in [1, \infty), \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

e calcolarne la soluzione nel punto $x = 1$ utilizzando il metodo dato con passo $h = \frac{1}{2}$.