

Prova scritta di Metodi Numerici per l'Ingegneria

24 luglio 2013

1. Assegnata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

si calcoli la sua norma con indice 1, ∞ e 2. Fissato un vettore qualsiasi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, con tutte le componenti non nulle, si calcolino $\mathbf{y} = AA^T\mathbf{x}$ e $\mathbf{z} = (I - AA^T)\mathbf{x}$, dove I è la matrice identità, e si mostri che $\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{x}$ e che i vettori \mathbf{y} e \mathbf{z} sono ortogonali.

2. Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 = 2 \end{cases}$$

e utilizzarla per calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

3. Costruire il polinomio di secondo grado che approssima nel senso dei minimi quadrati la seguente tabella di dati

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline y_i & 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}$$

risolvendo il sistema lineare sovradeterminato risultante col metodo delle equazioni normali, utilizzando l'algoritmo più appropriato. Dire, inoltre, se il polinomio determinato è interpolante e perché.

4. Si dica per quali valori del parametro α la seguente formula alle differenze finite risulta consistente, stabile, e per quali del secondo ordine

$$\eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{4} [f(x_i, \eta_i) + 3f(x_i + \alpha h, \eta_i + \alpha h f(x_i, \eta_i))].$$

Inoltre, nel caso in cui sia del secondo ordine, si utilizzi lo schema dato per approssimare la soluzione dell'equazione in $x = \frac{3}{2}$ con $h = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y' + (x^2 - 1)y = 2 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$