Prova scritta di Metodi Numerici per l'Ingegneria
2 luglio 2013

1. Si determinino i valori del parametro α che rendono ortogonale la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & \sqrt{3}\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \sqrt{2}\alpha \end{bmatrix}$$

e, fissato uno di essi, si calcoli il condizionamento della matrice in norma 1, ∞ e 2 e si risolva il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1, 5, 2]^T$.

2. Assegnati

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dire per quali valori del parametro reale a la matrice A è invertibile e per quali valori il metodo di Jacobi risulta convergente se applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Posto $a = \frac{1}{2}$, calcolare le prime due iterazioni del metodo di Gauss-Seidel, utilizzando il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^T$.

3. Costruire il polinomio di secondo grado che approssima nel senso dei minimi quadrati la seguente tabella di dati

x_i	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y_i	0	1	0	-3

risolvendo il sistema lineare sovradeterminato risultante col metodo delle equazioni normali, utilizzando l'algoritmo più appropriato. Dire, inoltre, se il polinomio determinato è interpolante e perché.

4. Classificare la seguente formula alle differenze finite per la risoluzione numerica di un problema di Cauchy

$$\begin{cases} \eta_{i+1} = \eta_i + \frac{h}{6}\left[f(x_i, \eta_i) + 4f(x_i + \alpha h, \eta_i + \alpha h f(x_i, \eta_i)) + \beta f(x_i + h, \eta_i + h f(x_i, \eta_i))\right] \\ \eta_0 = y_0 \end{cases}$$

e dire per quali valori dei parametri α e β è convergente e per quali è almeno del second'ordine.