

## Prova scritta di Metodi Numerici per l'Ingegneria

19 febbraio 2013

1. Calcolare il numero di condizionamento con indice 1, 2 e  $\infty$  della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Si determini la fattorizzazione  $PA = LU$  della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

e la si usi per calcolare il determinante di  $A$ .

3. Sia

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Stabilire per quali valori del parametro  $\alpha$  la matrice  $A$  è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi. Si consideri poi il sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  con  $\mathbf{b} = [1 \ 2 \ 3]^T$ . Si studi al variare del parametro  $\alpha$  la convergenza del metodo di Gauss Seidel applicato a tale sistema e, assegnato  $\alpha = 2$ , si calcolino le prime due iterate partendo dal vettore iniziale  $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \ 1 \ 0]^T$ .

4. Si classifichi il seguente schema alle differenze finite e se ne studino, al variare dei parametri reali  $\alpha$  e  $\beta$ , stabilità, consistenza e convergenza

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{3} \left[ f(x_k, \eta_k) + \frac{\alpha}{2} f \left( x_k + \frac{\alpha}{3\beta} h, \eta_k + \frac{\alpha}{3\beta} h f(x_k, \eta_k) \right) \right].$$

Inoltre, assegnati ai parametri dei valori che lo rendano del second'ordine e fissato  $h = \frac{1}{2}$ , si calcolino i primi due passi del metodo del secondo ordine al seguente problema di Cauchy, dopo avere dimostrato che ammette una e una sola soluzione

$$\begin{cases} y'(x) = -4xy, & x \in [0, 5], \\ y(0) = -1. \end{cases}$$