

Prova scritta di Metodi Numerici per l'Ingegneria

19 febbraio 2013

1. Calcolare il numero di condizionamento con indice 1, 2 e ∞ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Si determini la fattorizzazione $PA = LU$ della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

e la si usi per calcolare il determinante di A .

3. Sia

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Stabilire per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali i suoi autovalori sono positivi. Si consideri poi il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} = [1 \ 2 \ 3]^T$. Si studi al variare del parametro α la convergenza del metodo di Gauss Seidel applicato a tale sistema e, assegnato $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate partendo dal vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \ 1 \ 0]^T$.

4. Si classifichi il seguente schema alle differenze finite e se ne studino, al variare dei parametri reali α e β , stabilità, consistenza e convergenza

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{3} \left[f(x_k, \eta_k) + \frac{\alpha}{2} f \left(x_k + \frac{\alpha}{3\beta} h, \eta_k + \frac{\alpha}{3\beta} h f(x_k, \eta_k) \right) \right].$$

Inoltre, assegnati ai parametri dei valori che lo rendano del second'ordine e fissato $h = \frac{1}{2}$, si calcolino i primi due passi del metodo del secondo ordine al seguente problema di Cauchy, dopo avere dimostrato che ammette una e una sola soluzione

$$\begin{cases} y'(x) = -4xy, & x \in [0, 5], \\ y(0) = -1. \end{cases}$$