Prova scritta di Metodi Numerici per l'Ingegneria

8 gennaio 2013

1. Sia
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$
Calcolare il numero di condizione di A rispetto alle norme con indice 1 e ∞, e il numero di condizione di A e di A^2 rispetto alla norma 2.

2. Risolvere, mediante la fattorizzazione $PA = LU$, il sistema lineare
$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 = -3 \\ 4x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 10x_4 = -4 \\ 2x_1 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$
e utilizzarla per calcolare il determinante della matrice dei coefficienti.

3. Assegnati
$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix},$$
dire per quali valori del parametro reale a la matrice A è invertibile e per quali valori il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente se applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Posto $a = 3$, calcolare le prime due iterazioni del metodo di Jacobi, utilizzando il vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

4. Dire per quali valori dei parametri $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ il seguente metodo alle differenze finite è stabile, per quali è convergente e per quali è del secondo ordine
$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{3}\left[(\gamma - 5)f(x_k, \eta_k) + f\left(x_k - \frac{\gamma\delta}{4}h, \eta_k - \frac{\gamma\delta}{4}hf(x_k, \eta_k)\right)\right].$$