Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata
20 settembre 2023

Compito numero 1

1. Si calcoli la fattorizzatione $PA = LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

e la si utilizzi per calcolare il determinante di A, la soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [2, -1, 2]^T$, e la prima colonna dell'inversa A^{-1}.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -4/5 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -3/5 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 3, \quad \mathbf{x} = [-1/3, 4/3, 1/3]^T, \quad A^{-1}\mathbf{e}_1 = [1/3, -1/3, 2/3]^T.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali valori i suoi autovalori sono tutti positivi. Si studi inoltre, al variare del parametro α, la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Posto $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 0\ 1]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\alpha \neq \pm\sqrt{6}$. Gli autovalori sono positivi per $-\sqrt{6} < \alpha < \sqrt{6}$ e il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente per $-\sqrt{6} < \alpha < \sqrt{6}$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1/2, 0, 1/3]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [1/2, -1/3, 1/3]^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{yy' + 2x}{y}, \quad x \in [0, \infty), \\ y(1/4) = 1, y'(1/4) = 0, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{4}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 3/4$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (1, 1/8)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{33}{32}, \frac{13}{32})^T$.

4. Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione

$$f(x) = |x| + 1, \quad x \in [-2, 2].$$

Stabilire, inoltre, se la serie trovata è differenziabile termine a termine.

Soluzione. La serie è differenziabile termine a termine ed è data da

$$S_f(x) = 2 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((-1)^k - 1)}{k^2} \cos\left(k \frac{\pi}{2} x\right).$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\sin(k+2)e^{-2ik}}{k+2}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{2x\cos(4x)}{8x^2+1}\right\}.$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(x-2)}[H(x-1) - H(x-3)], \\ F(k) &= \frac{\mathrm{i}\pi}{8}\left[\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{4}(k+4)}H(-k-4) - \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}(k+4)}H(k+4)\right. \\ &\qquad \left. + \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{4}(k-4)}H(4-k) - \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{4}(k-4)}H(k-4)\right]. \end{aligned}$$