Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

14 luglio 2023

Compito numero 1

1. Data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
si calcoli la fattorizzazione $PA = LU$ e la si utilizzi per calcolare il determinante di A e la soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [6, 4, 9, 2]^T$.

   Soluzione.
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 & 8 \\ 0 & -3 & -9 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 13/3 \\ 0 & 0 & 0 & -11/3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\det(A) = 11, \quad \mathbf{x} = [2, -1, 0, 1]^T.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove
$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 3\alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali è definita positiva. Si studi inoltre, al variare del parametro α, la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Posto $\alpha = 2$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$.

   Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\alpha \neq 0, \pm\sqrt{6}/6$. È definita positiva per $\alpha > \sqrt{6}/6$ e il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente per $\alpha < -\sqrt{6}/6$ oppure $\alpha > \sqrt{6}/6$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1/4, 0, 1/6]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [5/24, 0, 1/8]^T$.

3. Trasformare il seguente problema del secondo ordine in un sistema del primo ordine
$$\begin{cases} y'' = \frac{4y'+xy}{x+1}, & x \in [0, \infty), \\ y(1/4) = 1, y'(1/4) = 0, \end{cases}$$

e utilizzare il metodo di Eulero esplicito con passo $h = \frac{1}{4}$ per approssimare la sua soluzione in $x = 3/4$.

Soluzione. $\boldsymbol{\eta}_1 = (1, 1/20)^T$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (\frac{81}{80}, \frac{1}{6})^T$.

4. Risolvere mediante la serie di Fourier la seguente equazione differenziale

$$3y'' - 2y = x^2, \quad x \in [-2, 2].$$

e stabilire se la serie del termine noto è differenziabile termine a termine.

Soluzione. La serie è differenziabile termine a termine ed è data da

$$S_f(x) = -\frac{2}{3} + 64 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2(8 + 3k^2\pi^2)} \cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)$$

5. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}k}}{k^2 - 4k + 20}\right\}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{\cos(x-3)H(x-3)}{\mathrm{e}^x}\right\}.$$

Soluzione.

$$f(x) = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-4|x+3|}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(x+3)}$$

$$F(k) = \frac{\mathrm{e}^{-3(2+\mathrm{i}k)}}{2}\left[\frac{1}{1+\mathrm{i}(k-1)} + \frac{1}{1+\mathrm{i}(k+1)}\right].$$