Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Prova scritta di Matematica Applicata

10 febbraio 2023

Compito numero 1

1. Si risolva mediante la fattorizzazione $PA = LU$ il sistema lineare

$$\begin{cases} -4x_2 + x_3 - 7x_4 = 13 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_4 = 9. \end{cases}$$

Si calcoli inoltre, mediante tale fattorizzazione, il determinante della matrice dei coefficienti del sistema.

Soluzione.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det(A) = 486, \quad \mathbf{x} = [1, 0, -1, -2]^T.$$

2. Si consideri il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 3\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3\alpha \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si stabilisca per quali valori del parametro α la matrice A è invertibile e per quali i suoi autovalori sono reali e positivi. Si studi inoltre, al variare del parametro α, la convergenza del metodo di Gauss-Seidel applicato a tale sistema. Posto $\alpha = 1$, si calcolino le prime due iterate del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$.

Soluzione. La matrice dei coefficienti è non singolare se $\alpha \neq 0, 1/9$, gli autovalori sono reali e positivi se $\alpha > 1/9$. Il metodo di Gauss-Seidel converge per $\alpha < -1/9$ oppure $\alpha > 1/9$. Le prime due iterate del metodo di Jacobi sono $\mathbf{x}^{(1)} = [1/3, -1/3, 1/3]^T$ e $\mathbf{x}^{(2)} = [2/9, -1/3, 2/9]^T$.

3. Si classifichi il seguente schema alle differenze finite

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \beta \frac{h}{2} \left[3f(x_k, \eta_k) + 2\beta f\left(x_k + 3\alpha\beta h, \eta_k + 3\alpha\beta h f(x_k, \eta_k)\right) \right]$$

e se ne studi la stabilità, al variare dei parametri reali α e β. Si stabilisca, inoltre, per quali valori di tali parametri lo schema ha il massimo ordine di convergenza.

Soluzione. Lo schema dato è un metodo monostep esplicito ed è stabile per tutti i valori dei parametri α e β. Converge per $\beta = -2, \frac{1}{2}$, ed è del secondo ordine per $(\alpha, \beta) = (-\frac{1}{48}, -2)$ e per $(\alpha, \beta) = (\frac{4}{3}, \frac{1}{2})$. Essendo a due stadi, non può avere un ordine superiore a due.

4. Calcolare la serie di Fourier della seguente funzione e stabilire se è differenziabile termine a termine

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), & -2 \le x < -1, \\ x, & -1 \le x < 1, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Soluzione. La serie è differenziabile termine a termine e risulta essere

$$S_f(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left[-\left(\frac{2}{k} + \frac{2k}{1-k^2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right.$$
$$\left. + \frac{4}{k^2\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-y' + 16y = H(x+2) - H(x-3), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \begin{cases} \frac{e^{16x}}{16}(e^{32} - e^{-48}), & x < -2, \\ \frac{1}{16}(1 - e^{16(x-3)}), & -2 \le x < 3, \\ 0, & x \ge 3. \end{cases}$$