Nome e matricola: ....

Corso di studi: ....

Recupero prima prova intermedia di Matematica Applicata

25 gennaio 2023

Compito numero 1

1. Si considerino i seguenti vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si dica se il vettore $\mathbf{v}_1$ è ortogonale al vettore $\mathbf{v}_3$ e si calcoli la norma ∞, norma 1 e norma 2 del vettore $\mathbf{v}_2$. Si costruisca, inoltre, mediante il procedimento di Gram-Schmidt l'insieme di vettori ortonormali $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$ a partire dai vettori dati. Dire se la matrice $Q = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3]$ è ortogonale e perché.

Soluzione. Il vettore $\mathbf{v}_1$ è ortogonale al vettore $\mathbf{v}_3$,

$$\|\mathbf{v}_2\|_\infty = 1, \quad \|\mathbf{v}_2\|_1 = 2, \quad \|\mathbf{v}_2\|_2 = \sqrt{2}.$$

I vettori ortonormali richiesti sono

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

La matrice Q è ortogonale in quanto $Q^TQ = I$, essendo le sue colonne ortonormali.

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 2 & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1/2 & \beta & 0 \\ \beta & -1/2 & \beta \\ 0 & \beta & -1/2 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & \gamma & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix},$$

dove α, β e γ sono parametri reali. Dire per quali valori di α la matrice A è non singolare e verificare che $\lambda = -2$ è un autovalore di A per ogni valore di α. Si fissi ora $\alpha = -2$. Determinare i valori di β che rendono B l'inversa di A e i valori di γ che rendono Q ortogonale. Assegnato a γ uno di tali valori, calcolare la matrice $M = (QA)^{-1}$.

Soluzione. La matrice A è non singolare per $\alpha \neq \pm\sqrt{2}$ e il suo raggio spettrale è $2+\sqrt{2}|\alpha|$ per ogni valore di α. Posto $\alpha = -2$, la matrice B è l'inversa di A per $\beta = -1/2$, Q è ortogonale per $\gamma = \pm 1$ e

$$M = (QA)^{-1} = BQ^T = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/4 & -1/2 & 1/4 \\ -\sqrt{3}/4 - 1/4 & -1/2 & -\sqrt{3}/4 + 1/4 \\ -1/4 & -1/2 & -\sqrt{3}/4 \end{bmatrix}.$$

3. Risolvere, ricorrendo alla serie di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$-y'' + 2y = \cos(2x), \qquad x \in [-1/4, 1/4]$$

e dire se la serie del termine noto è differenziabile termine a termine.

Soluzione.

$$y(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{(1+8k^2\pi^2)(1-4k^2\pi^2)} \sin\left(\frac{1}{2}\right) \cos\left(4k\pi x\right).$$

Il termine noto è differenziabile termine a termine.

4. Eseguire i seguenti calcoli

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}(k-2)}{k^2-4k+9}\right\}, \qquad \mathcal{F}\left\{\frac{\sin(2x-2)}{(x-1)\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}\right\}$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(x+1)}\left[\mathrm{e}^{-\sqrt{5}(x+1)}H(x+1) + \mathrm{e}^{\sqrt{5}(x+1)}H(-x-1)\right], \\ F(k) &= \pi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-3)}\left[H(5-k) - H(1-k)\right]. \end{aligned}$$

5. Risolvere, ricorrendo alla trasformata di Fourier, la seguente equazione differenziale

$$y'' - \pi y = \mathrm{e}^{-2x}H(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

$$y(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{\pi}x}}{2+\sqrt{\pi}}, & x < 0, \\ -\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{2+\sqrt{\pi}} + \dfrac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-\sqrt{\pi}x}}{2-\sqrt{\pi}}, & x \geq 0. \end{cases}$$